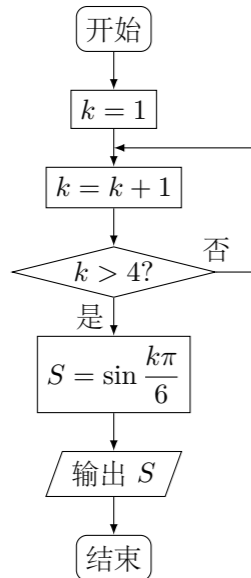


2015 普通高等学校招生考试 (四川卷文)

一、选择题

1. 设集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, 集合 $B = \{x | 1 < x < 3\}$, 则 $A \cup B = ()$
 (A) $\{x | -1 < x < 3\}$ (B) $\{x | -1 < x < 1\}$
 (C) $\{x | 1 < x < 2\}$ (D) $\{x | 2 < x < 3\}$
2. 设向量 $\mathbf{a} = (2, 4)$ 与向量 $\mathbf{b} = (x, 6)$ 共线, 则实数 $x = ()$
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6
3. 某学校为了了解三年级、六年级、九年级这三个年级之间的学生视力是否存在显著差异, 拟从这三个年级中按人数比例抽取部分学生进行调查, 则最合理的抽样方法是 $()$
 (A) 抽签法 (B) 系统抽样法 (C) 分层抽样法 (D) 随机数法
4. 设 a, b 为正实数, 则“ $a > b > 1$ ”是“ $\log_2 a > \log_2 b > 0$ ”的 $()$
 (A) 充要条件 (B) 充分不必要条件
 (C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件
5. 下列函数中, 最小正周期为 π 的奇函数是 $()$
 (A) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ (B) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$
 (C) $y = \sin 2x + \cos 2x$ (D) $y = \sin x + \cos x$
6. 执行如图所示的程序框图, 输出 S 的值为 $()$



- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$
7. 过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线, 交该双曲线的两条渐近线于 A, B 两点, $|AB| = ()$
 (A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 6 (D) $4\sqrt{3}$

8. 某食品的保鲜时间 y (单位: 小时) 与储藏温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 满足函数关系 $y = e^{kx+b}$ ($e = 2.718 \dots$ 为自然对数的底数, k, b 为常数). 若该食品在 0°C 的保鲜时间是 192 小时, 在 22°C 的保鲜时间是 48 小时, 则该食品在 33°C 的保鲜时间是 $()$
 (A) 16 小时 (B) 20 小时 (C) 24 小时 (D) 28 小时

9. 设实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x + y \leq 10, \\ x + 2y \leq 14, \\ x + y \geq 6, \end{cases}$ 则 xy 的最大值为 $()$

- (A) $\frac{25}{2}$ (B) $\frac{49}{2}$ (C) 12 (D) 16
10. 设直线 l 与抛物线 $y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点, 与圆 $(x-5)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相切于点 M , 且 M 为线段 AB 的中点. 若这样的直线 l 恰有 4 条, 则 r 的取值范围是 $()$
 (A) $(1, 3)$ (B) $(1, 4)$ (C) $(2, 3)$ (D) $(2, 4)$

二、填空题

11. 设 i 是虚数单位, 则复数 $i - \frac{1}{i} = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. $\lg 0.01 + \log_2 16$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
13. 已知 $\sin \alpha + 2 \cos \alpha = 0$, 则 $2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
14. 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^{\circ}$, 其正视图和侧视图都是边长为 1 的正方形, 俯视图是直角边的长为 1 的等腰直角三角形. 设点 M, N, P 分别是棱 AB, BC, B_1C_1 的中点, 则三棱锥 $P - A_1MN$ 的体积是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
15. 已知函数 $f(x) = 2^x, g(x) = x^2 + ax$ (其中 $a \in \mathbf{R}$). 对于不相等的实数 x_1, x_2 , 设 $m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, n = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$, 现有如下命题:
 ① 对于任意不相等的实数 x_1, x_2 , 都有 $m > 0$;
 ② 对于任意的 a 及任意不相等的实数 x_1, x_2 , 都有 $n > 0$;
 ③ 对于任意的 a , 存在不相等的实数 x_1, x_2 , 使得 $m = n$;
 ④ 对于任意的 a , 存在不相等的实数 x_1, x_2 , 使得 $m = -n$.
 其中的真命题有 $\underline{\hspace{2cm}}$. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

16. 设数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n - a_1$, 且 $a_1, a_2 + 1, a_3$ 成等差数列.
 (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 记数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

17. 一辆小客车上有 5 个座位, 其座位号为 1, 2, 3, 4, 5. 乘客 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 的座位号分别为 1, 2, 3, 4, 5, 他们按照座位号从小到大的顺序先后上车. 乘客 P_1 因身体原因没有坐自己的 1 号座位, 这时司机要求余下的乘客按以下规则就座: 如果自己的座位空着, 就只能坐自己的座位; 如果自己的座位已有乘客就座, 就在这 5 个座位的剩余空位中任意选择座位.

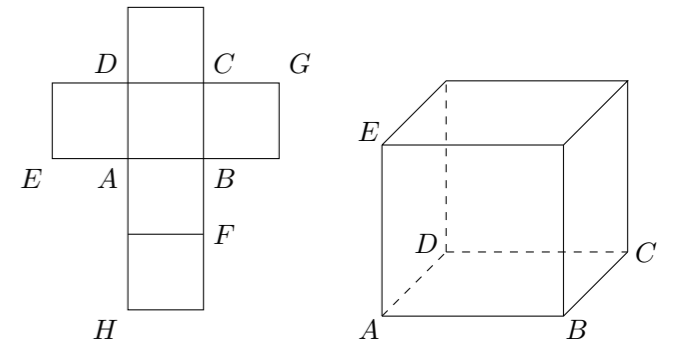
(1) 若乘客 P_1 坐到了 3 号座位, 其他乘客按规则就座, 则此时共有 4 种坐法. 下表给出了其中两种坐法, 请填入余下两种坐法 (将乘客就座的座位号填入表中空格处);

乘客	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
座位号	3	2	1	4	5
	3	2	4	5	1

(2) 若乘客 P_1 坐到了 2 号座位, 其他乘客按规则就座, 求乘客 P_5 坐到 5 号座位的概率.

18. 一个正方体的平面展开图及该正方体的直观图的示意图如图所示.

- (1) 请将字母 F, G, H 标记在正方体相应的顶点处 (不需说明理由);
- (2) 判断平面 BEG 与平面 ACH 的位置关系, 并证明你的结论;
- (3) 证明: 直线 $DF \perp$ 平面 BEG .



19. 已知 A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的内角, $\tan A, \tan B$ 是关于 x 的方程 $x^2 + \sqrt{3}px - p + 1 = 0$ ($p \in \mathbf{R}$) 的两个实根.

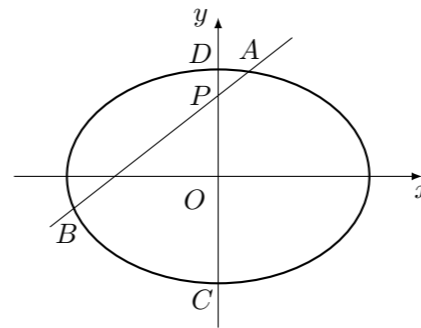
(1) 求 C 的大小;

(2) 若 $AB = 3, AC = \sqrt{6}$, 求 p 的值.

20. 如图, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $P(0, 1)$ 在短轴 CD 上, 且 $\vec{PC} \cdot \vec{PD} = -1$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 过点 P 的动直线与椭圆交于 A, B 两点. 是否存在常数 λ , 使得 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} + \lambda \vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 为定值? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.



21. 已知函数 $f(x) = -2x \ln x + x^2 - 2ax + a^2$, 其中 $a > 0$.

(1) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 存在 $a \in (0, 1)$, 使得 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 且 $f(x) = 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内有唯一解.