

2015 普通高等学校招生考试 (四川卷理)

一、选择题

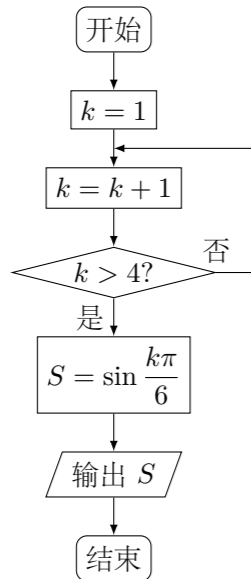
1. 设集合 $A = \{x | (x+1)(x-2) < 0\}$, 集合 $B = \{x | 1 < x < 3\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- (A) $\{x | -1 < x < 3\}$ (B) $\{x | -1 < x < 1\}$
 (C) $\{x | 1 < x < 2\}$ (D) $\{x | 2 < x < 3\}$

2. 设 i 是虚数单位, 则复数 $i^3 - \frac{2}{i} =$ ()

- (A) $-i$ (B) $-3i$ (C) i (D) $3i$

3. 执行如图所示的程序框图, 输出 S 的值为 ()



- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

4. 下列函数中, 最小正周期为 π 且图象关于原点对称的函数是 ()

- (A) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ (B) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$
 (C) $y = \sin 2x + \cos 2x$ (D) $y = \sin x + \cos x$

5. 过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点且与 x 轴垂直的直线, 交该双曲线的两条渐近线于 A, B 两点, $|AB| =$ ()

- (A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 6 (D) $4\sqrt{3}$

6. 用数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的五位数, 其中比 40000 大的偶数共有 ()

- (A) 144 个 (B) 120 个 (C) 96 个 (D) 72 个

7. 设四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $|\overrightarrow{AB}| = 6, |\overrightarrow{AD}| = 4$. 若点 M, N 满足 $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{NC}$, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NM} =$ ()

- (A) 20 (B) 15 (C) 9 (D) 6

8. 设 a, b 都是不等于 1 的正数, 则“ $3^a > 3^b > 3$ ”是“ $\log_a 3 < \log_b 3$ ”的 ()

- (A) 充要条件 (B) 充分不必要条件
 (C) 必要不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

9. 如果函数 $f(x) = \frac{1}{2}(m-2)x^2 + (n-8)x + 1$ ($m \geq 0, n \geq 0$) 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上单调递减, 那么 mn 的最大值为 ()

- (A) 16 (B) 18 (C) 25 (D) $\frac{81}{2}$

10. 设直线 l 与抛物线 $y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点, 与圆 $(x-5)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相切于点 M , 且 M 为线段 AB 的中点. 若这样的直线 l 恰有 4 条, 则 r 的取值范围是 ()

- (A) (1, 3) (B) (1, 4) (C) (2, 3) (D) (2, 4)

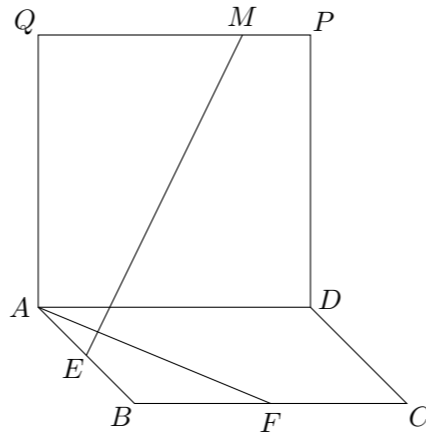
二、填空题

11. 在 $(2x-1)^5$ 的展开式中, 含 x^2 的项的系数是_____. (用数字填写答案)

12. $\sin 15^\circ + \sin 75^\circ$ 的值是_____.

13. 某食品的保鲜时间 y (单位: 小时) 与储藏温度 x (单位: $^\circ\text{C}$) 满足函数关系 $y = e^{kx+b}$ ($e = 2.718\cdots$ 为自然对数的底数, k, b 为常数). 若该食品在 0°C 的保鲜时间是 192 小时, 在 22°C 的保鲜时间是 48 小时, 则该食品在 33°C 的保鲜时间是_____小时.

14. 如图, 四边形 $ABCD$ 和 $ADPQ$ 均为正方形, 它们所在的平面互相垂直, 动点 M 在线段 PQ 上, E, F 分别为 AB, BC 的中点. 设异面直线 EM 与 AF 所成的角为 θ , 则 $\cos \theta$ 的最大值为_____.



15. 已知函数 $f(x) = 2^x, g(x) = x^2 + ax$ (其中 $a \in \mathbf{R}$). 对于不相等的实数 x_1, x_2 , 设 $m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, n = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$, 现有如下命题:

- ① 对于任意不相等的实数 x_1, x_2 , 都有 $m > 0$;
 ② 对于任意的 a 及任意不相等的实数 x_1, x_2 , 都有 $n > 0$;
 ③ 对于任意的 a , 存在不相等的实数 x_1, x_2 , 使得 $m = n$;
 ④ 对于任意的 a , 存在不相等的实数 x_1, x_2 , 使得 $m = -n$.
 其中的真命题有_____. (写出所有真命题的序号)

三、解答题

16. 设数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n - a_1$, 且 $a_1, a_2 + 1, a_3$ 成等差数列.

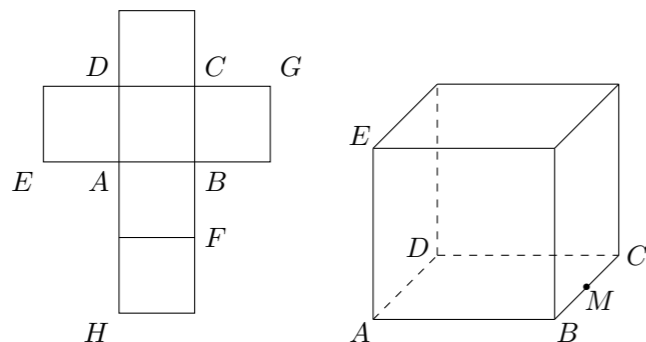
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 记数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求使得 $|T_n - 1| < \frac{1}{1000}$ 成立的 n 的最小值.

17. 某市 A, B 两所中学的学生组队参加辩论赛, A 中学推荐了 3 名男生、2 名女生, B 中学推荐了 3 名男生、4 名女生, 两校所推荐的学生一起参加集训. 由于集训后队员水平相当, 从参加集训的男生中随机抽取 3 人、女生中随机抽取 3 人组成代表队.

- (1) 求 A 中学至少有 1 名学生入选代表队的概率;
 (2) 某场比赛前, 从代表队的 6 名队员中随机抽取 4 人参赛, 设 X 表示参赛的男生人数, 求 X 的分布列和数学期望.

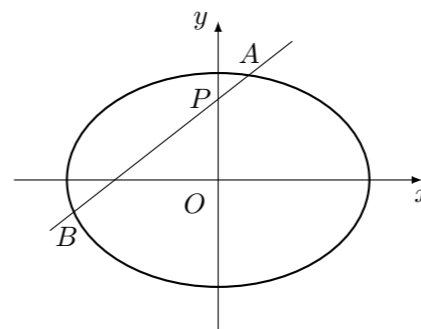
18. 一个正方体的平面展开图及该正方体的直观图的示意图如图所示. 在正方体中, 设 BC 的中点为 M , GH 的中点为 N .

- (1) 请将字母 F, G, H 标记在正方体相应的顶点处 (不需说明理由);
- (2) 证明: 直线 $MN \parallel$ 平面 BDH ;
- (3) 求二面角 $A-EG-M$ 的余弦值.



20. 如图, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过点 $P(0, 1)$ 的动直线 l 与椭圆相交于 A, B 两点. 当直线 l 平行于 x 轴时, 直线 l 被椭圆 E 截得的线段长为 $2\sqrt{2}$.

- (1) 求椭圆 E 的方程;
- (2) 在平面直角坐标系 xOy 中, 是否存在与点 P 不同的定点 Q , 使得 $\frac{|QA|}{|QB|} = \frac{|PA|}{|PB|}$ 恒成立? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



21. 已知函数 $f(x) = -2(x+a)\ln x + x^2 - 2ax - 2a^2 + a$, 其中 $a > 0$.

- (1) 设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, 讨论 $g(x)$ 的单调性;
- (2) 证明: 存在 $a \in (0, 1)$, 使得 $f(x) \geq 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立, 且 $f(x) = 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内有唯一解.

19. 如图, A, B, C, D 为平面四边形 $ABCD$ 的四个内角.

- (1) 证明: $\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$;
- (2) 若 $A + C = 180^\circ$, $AB = 6$, $BC = 3$, $CD = 4$, $AD = 5$, 求 $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{D}{2}$ 的值.

