2015 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

一、选择题

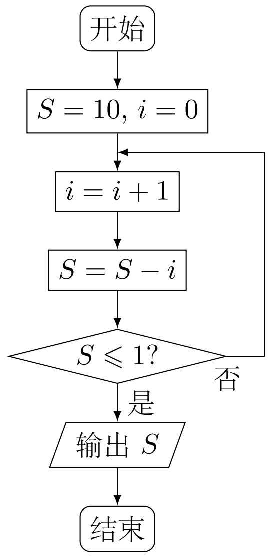
1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, 集合 $A=\{2, 3, 5\}$, 集合 $B=\{1, 3, 4, 6\}$, 则集合 $A\cap \complement_U B=$ ( )

(A) $\{3\}$　(B) $\{2, 5\}$　(C) $\{1, 4, 6\}$　(D) $\{2, 3, 5\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2\leqslant 0, \\ x-2y\leqslant 0, \\ x+2y-8\leqslant 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z=3x+y$ 的最大值为 ( )

(A) 7　(B) 8　(C) 9　(D) 14

3. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 则输出 i 的值为 ( )



(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

4. 设 $x\in \mathbf{R}$, 则“$1<x<2$”是“$|x-2|<1$”的 ( )

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

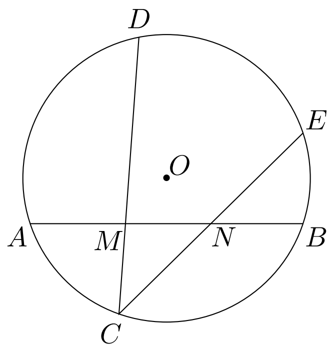
(C) 充要条件　(D) 既不充分也不必要条件

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的一焦点为 $F(2,0)$, 且双曲线的渐近线与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 相切, 则双曲线的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{13}=1$　(B) $\dfrac{x^2}{13}-\dfrac{y^2}{9}=1$

(C) $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$　(D) $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

6. 如图, 在圆 O 中, M, N 是弦 AB 的三等分点, 弦 CD, CE 分别经过点 M, N, 若 $CM=2, MD=4, CN=3$, 则线段 NE 的长为 ( )



(A) $\dfrac{8}{3}$　(B) 3　(C) $\dfrac{10}{3}$　(D) $\dfrac{5}{2}$

7. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=2^{|x-m|}-1$ (m 为实数) 为偶函数, 记 $a=f(\log_{0.5}3), b=f(\log_2 5), c=f(2m)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ( )

(A) $a<b<c$　(B) $c<a<b$　(C) $a<c<b$　(D) $c<b<a$

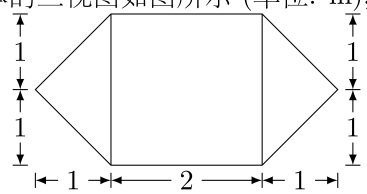
8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2-|x|, & x\leqslant 2, \\ (x-2)^2, & x>2, \end{cases}$ 函数 $g(x)=3-f(2-x)$, 则函数 $y=f(x)-g(x)$ 的零点个数为 ( )

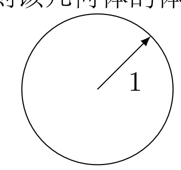
(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

二、填空题

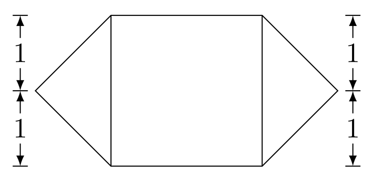
9. i 是虚数单位, 计算 $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ 的结果为______.

10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为______m^3.





正视图　侧视图



俯视图

11. 已知函数 $f(x)=ax\ln x$, $x\in(0,+\infty)$, 其中 a 为实数, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数. 若 $f'(1)=3$, 则 a 的值为______.

12. 已知 $a>0, b>0, ab=8$, 则当 a 的值为______时, $\log_2 a\cdot\log_2(2b)$ 取得最大值.

13. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB\parallel DC$, $AB=2$, $BC=1$, $\angle ABC=60^\circ$. 点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上, 且 $\overrightarrow{BE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的值为______.

14. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x\ (\omega>0)$, $x\in\mathbf{R}$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\omega,\omega)$ 内单调递增, 且函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\omega$ 对称, 则 ω 的值为______.

三、解答题

15. 设甲、乙、丙三个乒乓球协会的运动员人数分别为 27, 9, 18. 现采用分层抽样的方法从这三个协会中抽取 6 名运动员组队参加比赛.

(1) 求应从这三个协会中分别抽取的运动员的人数;

(2) 将抽取的 6 名运动员进行编号, 编号分别为 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. 现从这 6 名运动员中随机抽取 2 人参加双打比赛.

① 用所给编号列出所有可能的结果;

② 设 A 为事件: “编号为 A_5 和 A_6 的两名运动员中至少有 1 人被抽到”, 求事件 A 发生的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{15}$, $b-c=2$, $\cos A=-\dfrac{1}{4}$.

(1) 求 a 和 $\sin C$ 的值;

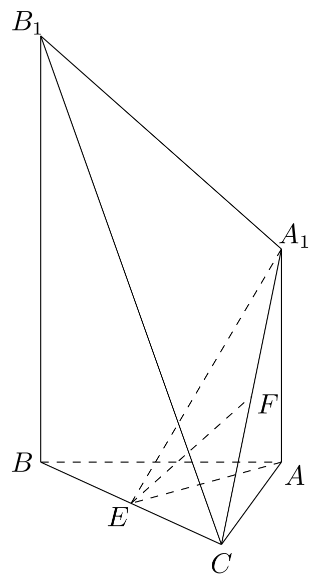
(2) 求 $\cos\left(2A+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

17. 如图, 已知 $AA_1 \perp$ 平面 ABC, $BB_1 /\!/ AA_1$, $AB=AC=3$, $BC=2\sqrt{5}$, $AA_1=\sqrt{7}$, $BB_1=2\sqrt{7}$, 点 E 和 F 分别为 BC 和 A_1C 的中点.

(1) 求证: $EF /\!/$ 平面 A_1B_1BA;

(2) 求证: 平面 $AEA_1 \perp$ 平面 BCB_1;

(3) 求直线 A_1B_1 与平面 BCB_1 所成角的大小.



18. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1=b_1=1$, $b_2+b_3=2a_3$, $a_5-3b_2=7$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n=a_nb_n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

19. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的上顶点为 B, 左焦点为 F, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求直线 BF 的斜率;

(2) 设直线 BF 与椭圆交于点 P (P 异于点 B), 过点 B 且垂直于 BP 的直线与椭圆交于点 Q (Q 异于点 B), 直线 PQ 与 y 轴交于点 M, $|PM|=\lambda|MQ|$.

① 求 λ 的值;

② 若 $|PM|\sin\angle BQP=\dfrac{7\sqrt{5}}{9}$, 求椭圆的方程.

20. 已知函数 $f(x)=4x-x^4$, $x\in\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P, 曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$, 求证: 对于任意的实数 x, 都有 $f(x)\leqslant g(x)$;

(3) 若方程 $f(x)=a$ (a 为实数) 有两个正实数根 x_1, x_2, 且 $x_1<x_2$, 求证: $x_2-x_1\leqslant -\dfrac{a}{3}+4^{\frac{1}{3}}$.