

2015 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

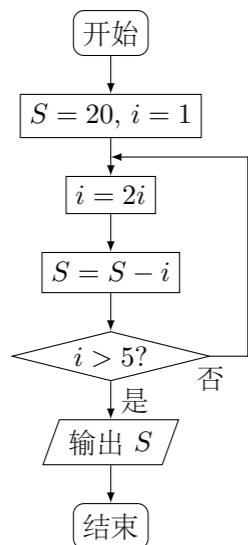
1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 集合 $A = \{2, 3, 5, 6\}$, 集合 $B = \{1, 3, 4, 6, 7\}$, 则集合 $A \cap \complement_U B =$ ()

- (A) $\{2, 5\}$ (B) $\{3, 6\}$
(C) $\{2, 5, 6\}$ (D) $\{2, 3, 5, 6, 8\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x-y+3 \geq 0, \\ 2x+y-3 \leq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = x+6y$ 的最大值为 ()

- (A) 3 (B) 4 (C) 18 (D) 40

3. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 则输出 S 的值为 ()

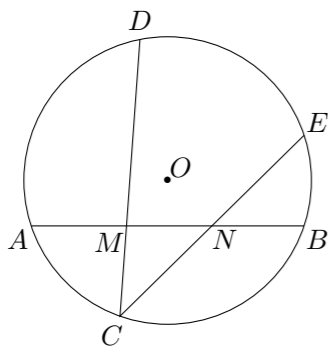


- (A) -10 (B) 6 (C) 14 (D) 18

4. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $|x-2| < 1$ ”是“ $x^2 + x - 2 > 0$ ”的 ()

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 如图, 在圆 O 中, M, N 是弦 AB 的三等分点, 弦 CD, CE 分别经过点 M, N , 若 $CM = 2, MD = 4, CN = 3$, 则线段 NE 的长为 ()



- (A) $\frac{8}{3}$ (B) 3 (C) $\frac{10}{3}$ (D) $\frac{5}{2}$

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线过点 $(2, \sqrt{3})$, 且双曲线的一个焦点在抛物线 $y^2 = 4\sqrt{7}x$ 的准线上, 则双曲线的方程为 ()

- (A) $\frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{28} = 1$ (B) $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{21} = 1$
(C) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ (D) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

7. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x) = 2^{|x-m|} - 1$ (m 为实数) 为偶函数, 记 $a = f(\log_{0.5} 3), b = f(\log_2 5), c = f(2m)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- (A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $c < a < b$ (D) $c < b < a$

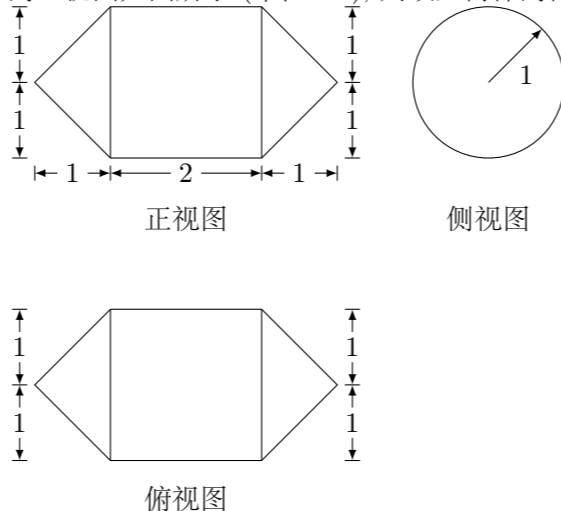
8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & x > 2, \end{cases}$ 函数 $g(x) = b - f(2-x)$, 其中 $b \in \mathbf{R}$. 若函数 $y = f(x) - g(x)$ 恰有 4 个零点, 则 b 的取值范围是 ()

- (A) $(\frac{7}{4}, +\infty)$ (B) $(-\infty, \frac{7}{4})$ (C) $(0, \frac{7}{4})$ (D) $(\frac{7}{4}, 2)$

二、填空题

9. i 是虚数单位, 若复数 $(1-2i)(a+i)$ 是纯虚数, 则实数 a 的值为_____.

10. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: m), 则该几何体的体积为_____ m^3 .



11. 曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x$ 所围成的封闭图形的面积为_____.

12. 在 $(x - \frac{1}{4x})^6$ 的展开式中, x^2 的系数为_____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{15}$, $b - c = 2$, $\cos A = -\frac{1}{4}$, 则 a 的值为_____.

14. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB \parallel DC, AB = 2, BC = 1, \angle ABC = 60^\circ$. 动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上, 且 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DF} = \frac{1}{9\lambda} \overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值为_____.

三、解答题

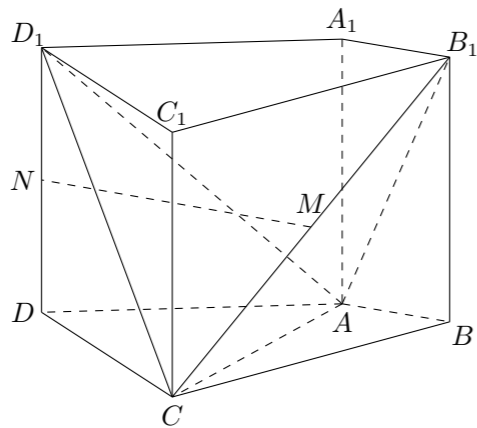
15. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x - \sin^2(x - \frac{\pi}{6}), x \in \mathbf{R}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

16. 为推动乒乓球运动的发展, 某乒乓球比赛允许不同协会的运动员组队参加. 现有来自甲协会的运动员 3 名, 其中种子选手 2 名; 乙协会的运动员 5 名, 其中种子选手 3 名. 从这 8 名运动员中随机选择 4 人参加比赛.

- (1) 设 A 为事件“选出的 4 人中恰有 2 名种子选手, 且这 2 名种子选手来自同一个协会”, 求事件 A 发生的概率;
(2) 设 X 为选出的 4 人中种子选手的人数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

17. 如图, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 侧棱 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \perp AC$, $AB = 1$, $AC = AA_1 = 2$, $AD = CD = \sqrt{5}$, 且点 M 和 N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点.
- (1) 求证: $MN \parallel$ 平面 $ABCD$;
 - (2) 求二面角 $D_1 - AC - B_1$ 的正弦值;
 - (3) 设 E 为棱 A_1B_1 上的点, 若直线 NE 和平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$, 求线段 A_1E 的长.



18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = qa_n$ (q 为实数, 且 $q \neq 1$), $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, 且 $a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5$ 成等差数列.
- (1) 求 q 的值和 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - (2) 设 $b_n = \frac{\log_2 a_{2n}}{a_{2n-1}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

19. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 $F(-c, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 点 M 在椭圆上且位于第一象限, 直线 FM 被圆 $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$ 截得的线段的长为 c , $|FM| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.
- (1) 求直线 FM 的斜率;
 - (2) 求椭圆的方程;
 - (3) 设动点 P 在椭圆上, 若直线 FP 的斜率大于 $\sqrt{2}$, 求直线 OP (O 为原点) 的斜率的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = nx - x^n$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $n \geq 2$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
 - (2) 设曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P , 曲线在点 P 处的切线方程为 $y = g(x)$, 求证: 对于任意的正实数 x , 都有 $f(x) \leq g(x)$;
 - (3) 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ (a 为实数) 有两个正实数根 x_1, x_2 , 求证: $|x_2 - x_1| < \frac{a}{1-n} + 2$.