2015 普通高等学校招生考试 (山东卷理)

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0\}$, $B=\{x\mid 2<x<4\}$, 则 $A\cap B=$(　)

(A) $(1,3)$　　(B) $(1,4)$　　(C) $(2,3)$　　(D) $(2,4)$

2. 若复数 z 满足 $\dfrac{\overline{z}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z=$　(　)

(A) $1-\mathrm{i}$　　(B) $1+\mathrm{i}$　　(C) $-1-\mathrm{i}$　　(D) $-1+\mathrm{i}$

3. 要得到函数 $y=\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需要将函数 $y=\sin 4x$ 的图象　(　)

(A) 向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位　　(B) 向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位

(C) 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位　　(D) 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位

4. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 a, $\angle ABC=60^\circ$, 则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=$　(　)

(A) $-\dfrac{3}{2}a^2$　　(B) $-\dfrac{3}{4}a^2$　　(C) $\dfrac{3}{4}a^2$　　(D) $\dfrac{3}{2}a^2$

5. 不等式 $|x-1|-|x-5|<2$ 的解集是　(　)

(A) $(-\infty,4)$　　(B) $(-\infty,1)$　　(C) $(1,4)$　　(D) $(1,5)$

6. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y\leqslant 2,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 若 $z=ax+y$ 的最大值为 4, 则 $a=$　(　)

(A) 3　　(B) 2　　(C) -2　　(D) -3

7. 在梯形 $ABCD$ 中, $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$, $AD\parallel BC$, $BC=2AD=2AB=2$. 将梯形 $ABCD$ 绕 AD 所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为　(　)

(A) $\dfrac{2\pi}{3}$　　(B) $\dfrac{4\pi}{3}$　　(C) $\dfrac{5\pi}{3}$　　(D) 2π

8. 已知某批零件的长度误差 (单位: 毫米) 服从正态分布 $N(0,3^2)$, 从中随机取一件, 其长度误差落在区间 $(3,6)$ 内的概率为　(　)

(附: 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=68.26\%$, $P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)=95.44\%$)

(A) 4.56%　　(B) 13.59%　　(C) 27.18%　　(D) 31.74%

9. 一条光线从点 $(-2,-3)$ 射出, 经 y 轴反射后与圆 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 相切, 则反射光线所在直线的斜率为　(　)

(A) $-\dfrac{5}{3}$ 或 $-\dfrac{3}{5}$　　(B) $-\dfrac{3}{2}$ 或 $-\dfrac{2}{3}$　　(C) $-\dfrac{5}{4}$ 或 $-\dfrac{4}{5}$　　(D) $-\dfrac{4}{3}$ 或 $-\dfrac{3}{4}$

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<1,\\ 2^x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则满足 $f(f(a))=2^{f(a)}$ 的 a 取值范围是　(　)

(A) $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$　　(B) $[0,1]$　　(C) $\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right)$　　(D) $[1,+\infty)$

二、填空题

11. 观察下列各式:

$\mathrm{C}_1^0=4^0$;

$\mathrm{C}_3^0+\mathrm{C}_3^1=4^1$;

$\mathrm{C}_5^0+\mathrm{C}_5^1+\mathrm{C}_5^2=4^2$;

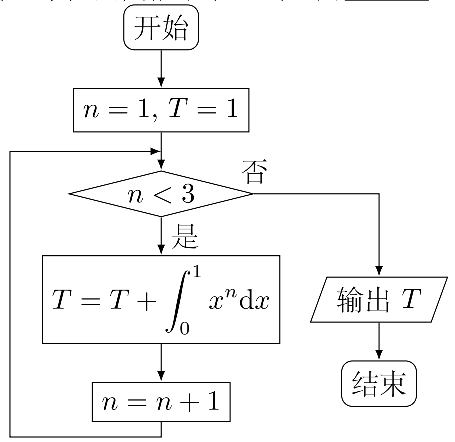
$\mathrm{C}_7^0+\mathrm{C}_7^1+\mathrm{C}_7^2+\mathrm{C}_7^3=4^3$;

……

照此规律, 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时, $\mathrm{C}_{2n-1}^0+\mathrm{C}_{2n-1}^1+\mathrm{C}_{2n-1}^2+\cdots+\mathrm{C}_{2n-1}^{n-1}=$______.

12. 若"$\forall x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $\tan x\leqslant m$"是真命题, 则实数 m 的最小值为______.

13. 执行如图所示的程序框图, 输出的 T 的值为______.



14. 已知函数 $f(x)=a^x+b\ (a>0,\ a\neq 1)$ 的定义域和值域都是 $[-1,0]$, 则 $a+b=$______.

15. 平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 C_1: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的渐近线与抛物线 C_2: $x^2=2py\ (p>0)$ 交于 O, A, B. 若 $\triangle OAB$ 的垂心为 C_2 的焦点, 则 C_1 的离心率为______.

三、解答题

16. 设 $f(x)=\sin x\cos x-\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

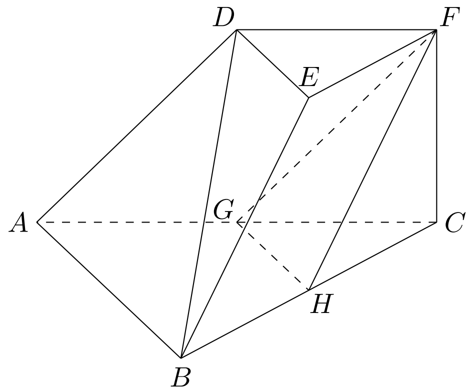
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c. 若 $f\left(\dfrac{A}{2}\right)=0$, $a=1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

17. 如图, 在三棱台 $DEF-ABC$ 中, $AB=2DE$, G, H 分别为 AC, BC 的中点.

(1) 求证: $BD\parallel$ 平面 FGH;

(2) 若 $CF\perp$ 平面 ABC, $AB\perp BC$, $CF=DE$, $\angle BAC=45^\circ$, 求平面 FGH 与平面 $ACFD$ 所成的角 (锐角) 的大小.



18. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 已知 $2S_n=3^n+3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_nb_n=\log_3 a_n$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. 若 n 是一个三位正整数, 且 n 的个位数字大于十位数字, 十位数字大于百位数字, 则称 n 为“三位递增数”(如 137, 359, 567 等). 在某次数学趣味活动中, 每位参加者需从所有的“三位递增数”中随机抽取 1 个数, 且只能抽取一次. 得分规则如下: 若抽取的“三位递增数”的三个数字之积不能被 5 整除, 参加者得 0 分; 若能被 5 整除, 但不能被 10 整除, 得 -1 分; 若能被 10 整除, 得 1 分.

(1) 写出所有个位数字是 5 的“三位递增数”;

(2) 若甲参加活动, 求甲得分 X 的分布列和数学期望 EX.

20. 平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 左、右焦点分别是 F_1, F_2. 以 F_1 为圆心以 3 为半径的圆与以 F_2 为圆心以 1 为半径的圆相交, 且交点在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设椭圆 E: $\dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1$, P 为椭圆 C 上任意一点, 过点 P 的直线 $y=kx+m$ 交椭圆 E 于 A, B 两点, 射线 PO 交椭圆 E 于点 Q.

① 求 $\dfrac{|OQ|}{|OP|}$ 的值;

② 求 $\triangle ABQ$ 面积的最大值.

21. 设函数 $f(x)=\ln(x+1)+a(x^2-x)$, 其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数, 并说明理由;

(2) 若 $\forall x>0$, $f(x)\geqslant 0$ 成立, 求 a 的取值范围.