

2015 普通高等学校招生考试 (湖北卷文)

一、选择题

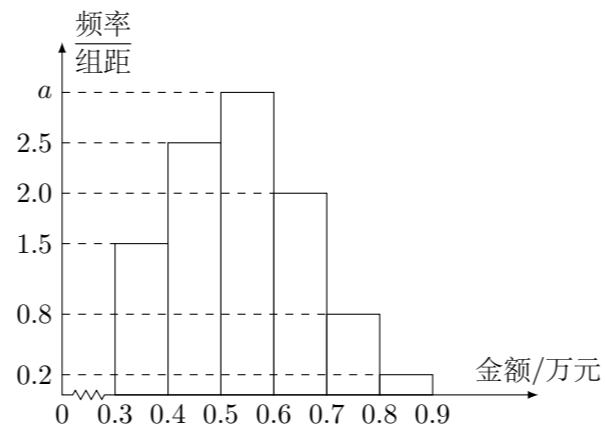
1. i 为虚数单位, $i^{607} =$ ()
 (A) i (B) $-i$ (C) 1 (D) -1
2. 我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题: 粮仓开仓收粮, 有人送来米 1534 石, 验得米内夹谷, 抽样取米一把, 数得 254 粒内夹谷 28 粒, 则这批米内夹谷约为 ()
 (A) 134 石 (B) 169 石 (C) 338 石 (D) 1365 石
3. 命题“ $\exists x_0 \in (0, +\infty), \ln x_0 = x_0 - 1$ ”的否定是 ()
 (A) $\exists x_0 \in (0, +\infty), \ln x_0 \neq x_0 - 1$ (B) $\exists x_0 \notin (0, +\infty), \ln x_0 = x_0 - 1$
 (C) $\forall x \in (0, +\infty), \ln x \neq x - 1$ (D) $\forall x \notin (0, +\infty), \ln x = x - 1$
4. 已知变量 x 和 y 满足关系 $y = -0.1x + 1$, 变量 y 与 z 正相关. 下列结论中正确的是 ()
 (A) x 与 y 正相关, x 与 z 负相关 (B) x 与 y 正相关, x 与 z 正相关
 (C) x 与 y 负相关, x 与 z 负相关 (D) x 与 y 负相关, x 与 z 正相关
5. l_1, l_2 表示空间中的两条直线, 若 $p: l_1, l_2$ 是异面直线; $q: l_1, l_2$ 不相交, 则 ()
 (A) p 是 q 的充分条件, 但不是 q 的必要条件
 (B) p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分条件
 (C) p 是 q 的充分必要条件
 (D) p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件
6. 函数 $f(x) = \sqrt{4 - |x|} + \lg \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ 的定义域为 ()
 (A) $(2, 3)$ (B) $(2, 4]$
 (C) $(2, 3) \cup (3, 4]$ (D) $(-1, 3) \cup (3, 6]$
7. 已知符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ 则 ()
 (A) $|x| = x|\operatorname{sgn} x|$ (B) $|x| = x\operatorname{sgn}|x|$
 (C) $|x| = |x|\operatorname{sgn} x$ (D) $|x| = x\operatorname{sgn} x$
8. 在区间 $[0, 1]$ 上随机取两个数 x, y , 记 p_1 为事件“ $x + y \leq \frac{1}{2}$ ”的概率, p_2 为事件“ $xy \leq \frac{1}{2}$ ”的概率, 则 ()
 (A) $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$ (B) $p_2 < \frac{1}{2} < p_1$ (C) $\frac{1}{2} < p_2 < p_1$ (D) $p_1 < \frac{1}{2} < p_2$

9. 将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 b ($a \neq b$) 同时增加 m ($m > 0$) 个单位长度, 得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2 , 则 ()
 (A) 对任意的 $a, b, e_1 > e_2$
 (B) 当 $a > b$ 时, $e_1 > e_2$; 当 $a < b$ 时, $e_1 < e_2$
 (C) 对任意的 $a, b, e_1 < e_2$
 (D) 当 $a > b$ 时, $e_1 < e_2$; 当 $a < b$ 时, $e_1 > e_2$

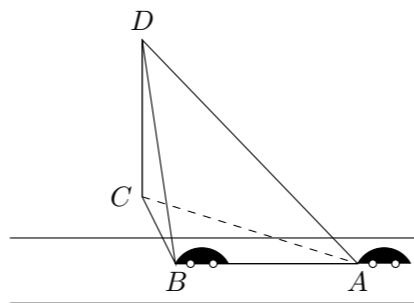
10. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x, y \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{(x, y) | |x| \leq 2, |y| \leq 2, x, y \in \mathbf{Z}\}$, 定义集合 $A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) | (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$, 则 $A \oplus B$ 中元素的个数为 ()
 (A) 77 (B) 49 (C) 45 (D) 30

二、填空题

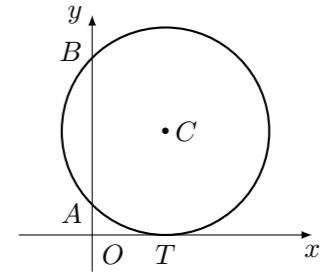
11. 已知向量 $\vec{OA} \perp \vec{AB}$, $|\vec{OA}| = 3$, 则 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} =$ _____.
12. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \leq 4, \\ x - y \leq 2, \\ 3x - y \geq 0, \end{cases}$ 则 $3x + y$ 的最大值是_____.
13. 函数 $f(x) = 2 \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - x^2$ 的零点个数为_____.
14. 某电子商务公司对 10000 名网络购物者 2014 年度的消费情况进行统计, 发现消费金额 (单位: 万元) 都在区间 $[0.3, 0.9]$ 内, 其频率分布直方图如图所示.
 (1) 直方图中的 $a =$ _____.
 (2) 在这些购物者中, 消费金额在区间 $[0.5, 0.9]$ 内的购物者的人数为_____.



15. 如图, 一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶, 到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30° 的方向上, 行驶 600 m 后到达 B 处, 测得此山顶在西偏北 75° 的方向上, 仰角为 30° , 则此山的高度 $CD =$ _____ m.



16. 如图, 圆 C 与 x 轴相切于点 $T(1, 0)$, 与 y 轴正半轴交于两点 A, B (B 在 A 的上方), 且 $|AB| = 2$.



- (1) 圆 C 的标准方程为_____;
 (2) 圆 C 在点 B 处的切线在 x 轴上的截距为_____.

17. a 为实数, 函数 $f(x) = |x^2 - ax|$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值记为 $g(a)$. 当 $a =$ _____时, $g(a)$ 的值最小.

三、解答题

18. 某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象时, 列表并填入了部分数据, 如下表:

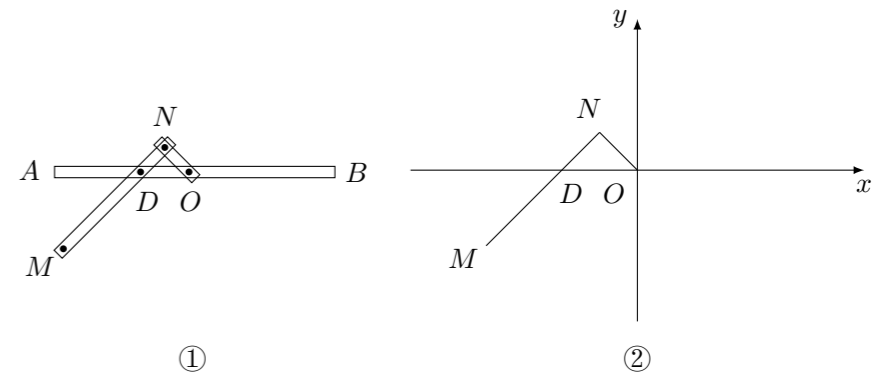
$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A \sin(\omega x + \varphi)$	0	5		-5	0

- (1) 请将上表数据补充完整, 填写在答题卡上相应位置, 并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式;
 (2) 将 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $y = g(x)$ 的图象. 求 $y = g(x)$ 的图象离原点 O 最近的对称中心.

19. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q . 已知 $b_1 = a_1, b_2 = 2, q = d, S_{10} = 100$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;
 - (2) 当 $d > 1$ 时, 记 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

21. 设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, $f(x) + g(x) = e^x$, 其中 e 为自然对数的底数.
- (1) 求 $f(x), g(x)$ 的解析式, 并证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0, g(x) > 1$;
 - (2) 设 $a \leq 0, b \geq 1$, 证明: 当 $x > 0$ 时, $ag(x) + (1-a) < \frac{f(x)}{x} < bg(x) + (1-b)$.

22. 一种作图工具如图①所示. O 是滑槽 AB 的中点, 短杆 ON 可绕 O 转动, 长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动, 且 $DN = ON = 1, MN = 3$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时, 带动 N 绕 O 转动一周 (D 不动时, N 也不动), M 处的笔尖画出的曲线记为 C . 以 O 为原点, AB 所在的直线为 x 轴建立如图②所示的平面直角坐标系.
- (1) 求曲线 C 的方程;
 - (2) 设动直线 l 与两定直线 $l_1: x - 2y = 0$ 和 $l_2: x + 2y = 0$ 分别交于 P, Q 两点. 若直线 l 总与曲线 C 有且只有一个公共点, 试探究: $\triangle OPQ$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 求出该最小值; 若不存在, 说明理由.



20. 《九章算术》中, 将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马, 将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.
- 如图, 在阳马 $P-ABCD$ 中, 侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PD = CD$, 点 E 是 PC 的中点, 连接 DE, BD, BE .
- (1) 证明: $DE \perp$ 平面 PBC . 试判断四面体 $EBCD$ 是否为鳖臑, 若是, 写出其每个面的直角 (只需写出结论); 若不是, 请说明理由;
 - (2) 记阳马 $P-ABCD$ 的体积为 V_1 , 四面体 $EBCD$ 的体积为 V_2 , 求 $\frac{V_1}{V_2}$ 的值.

