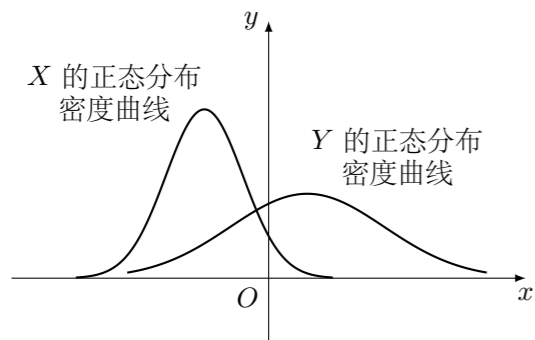


2015 普通高等学校招生考试 (湖北卷理)

一、选择题

- i 为虚数单位, i^{607} 的共轭复数为 ()
(A) i (B) $-i$ (C) 1 (D) -1
- 我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题: 粮仓开仓收粮, 有人送来米 1534 石, 验得米内夹谷, 抽样取米一把, 数得 254 粒内夹谷 28 粒, 则这批米内夹谷约为 ()
(A) 134 石 (B) 169 石 (C) 338 石 (D) 1365 石
- 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等, 则奇数项的二项式系数和为 ()
(A) 2^{12} (B) 2^{11} (C) 2^{10} (D) 2^9
- 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 这两个正态分布密度曲线如图所示, 下列结论中正确的是 ()

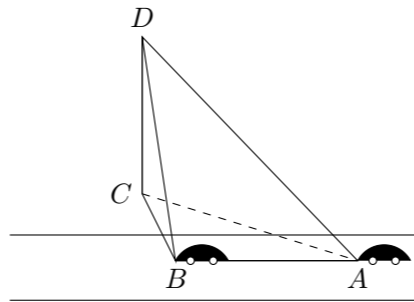


- $P(Y \geq \mu_2) \geq P(Y \geq \mu_1)$
 - $P(X \leq \sigma_2) \leq P(X \leq \sigma_1)$
 - 对任意正数 t , $P(X \leq t) \geq P(Y \leq t)$
 - 对任意正数 t , $P(X \geq t) \geq P(Y \geq t)$
- 设 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, $n \geq 3$. 若 $p: a_1, a_2, \dots, a_n$ 成等比数列; $q: (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)(a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n)^2$, 则 ()
(A) p 是 q 的充分条件, 但不是 q 的必要条件
(B) p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分条件
(C) p 是 q 的充分必要条件
(D) p 既不是 q 的充分条件, 也不是 q 的必要条件
 - 已知符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, $g(x) = f(x) - f(ax)$ ($a > 1$), 则 ()
(A) $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn} x$ (B) $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn} x$
(C) $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn}[f(x)]$ (D) $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn}[f(x)]$

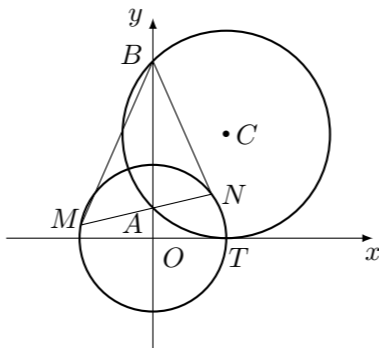
- 在区间 $[0, 1]$ 上随机取两个数 x, y , 记 p_1 为事件“ $x+y \geq \frac{1}{2}$ ”的概率, p_2 为事件“ $|x-y| \leq \frac{1}{2}$ ”的概率, p_3 为事件“ $xy \leq \frac{1}{2}$ ”的概率, 则 ()
(A) $p_1 < p_2 < p_3$ (B) $p_2 < p_3 < p_1$ (C) $p_3 < p_1 < p_2$ (D) $p_3 < p_2 < p_1$
- 将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 b ($a \neq b$) 同时增加 m ($m > 0$) 个单位长度, 得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2 , 则 ()
(A) 对任意的 $a, b, e_1 > e_2$
(B) 当 $a > b$ 时, $e_1 > e_2$; 当 $a < b$ 时, $e_1 < e_2$
(C) 对任意的 $a, b, e_1 < e_2$
(D) 当 $a > b$ 时, $e_1 < e_2$; 当 $a < b$ 时, $e_1 > e_2$
- 已知集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x, y \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{(x, y) \mid |x| \leq 2, |y| \leq 2, x, y \in \mathbf{Z}\}$, 定义集合 $A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \mid (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$, 则 $A \oplus B$ 中元素的个数为 ()
(A) 77 (B) 49 (C) 45 (D) 30
- 设 $x \in \mathbf{R}$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 若存在实数 t , 使得 $[t] = 1, [t^2] = 2, \dots, [t^n] = n$ 同时成立, 则正整数 n 的最大值是 ()
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

二、填空题

- 已知向量 $\vec{OA} \perp \vec{AB}$, $|\vec{OA}| = 3$, 则 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} =$ _____.
- 函数 $f(x) = 4\cos^2 \frac{x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2\sin x - |\ln(x+1)|$ 的零点个数为_____.
- 如图, 一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶, 到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30° 的方向上, 行驶 600 m 后到达 B 处, 测得此山顶在西偏北 75° 的方向上, 仰角为 30° , 则此山的高度 $CD =$ _____ m.

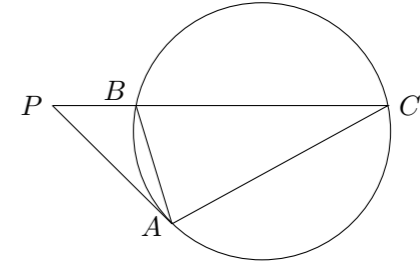


- 如图, 圆 C 与 x 轴相切于点 $T(1, 0)$, 与 y 轴正半轴交于两点 A, B (B 在 A 的上方), 且 $|AB| = 2$.



- 圆 C 的标准方程为_____;
- 过点 A 任作一条直线与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 M, N 两点, 下列三个结论:
① $\frac{|NA|}{|NB|} = \frac{|MA|}{|MB|}$; ② $\frac{|NB|}{|NA|} - \frac{|MA|}{|MB|} = 2$; ③ $\frac{|NB|}{|NA|} + \frac{|MA|}{|MB|} = 2\sqrt{2}$.
其中正确结论的序号是_____. (写出所有正确结论的序号)

- 如图, PA 是圆的切线, A 为切点, PBC 是圆的割线, 且 $BC = 3PB$, 则 $\frac{AB}{AC} =$ _____.



- 在直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\sin\theta - 3\cos\theta) = 0$, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = t - \frac{1}{t}, \\ y = t + \frac{1}{t}, \end{cases}$ (t 为参数), l 与 C 相交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____.

三、解答题

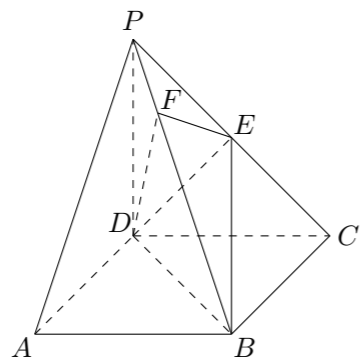
- 某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在某一个周期内的图象时, 列表并填入了部分数据, 如下表:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x + \varphi)$	0	5		-5	0

- 请将上表数据补充完整, 填写在答题卡上相应位置, 并直接写出函数 $f(x)$ 的解析式;
- 将 $y = f(x)$ 图象上所有点向左平行移动 θ ($\theta > 0$) 个单位长度, 得到 $y = g(x)$ 的图象. 若 $y = g(x)$ 图象的一个对称中心为 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$, 求 θ 的最小值.

18. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q . 已知 $b_1 = a_1, b_2 = 2, q = d, S_{10} = 100$.
- (1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 当 $d > 1$ 时, 记 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

19. 《九章算术》中, 将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马, 将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.
- 如图, 在阳马 $P-ABCD$ 中, 侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PD = CD$, 过棱 PC 的中点 E , 作 $EF \perp PB$ 交 PB 于点 F , 连接 DE, DF, BD, BE .
- (1) 证明: $PB \perp$ 平面 DEF . 试判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑, 若是, 写出其每个面的直角 (只需写出结论); 若不是, 说明理由.
- (2) 若面 DEF 与面 $ABCD$ 所成二面角的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 求 $\frac{DC}{BC}$ 的值.



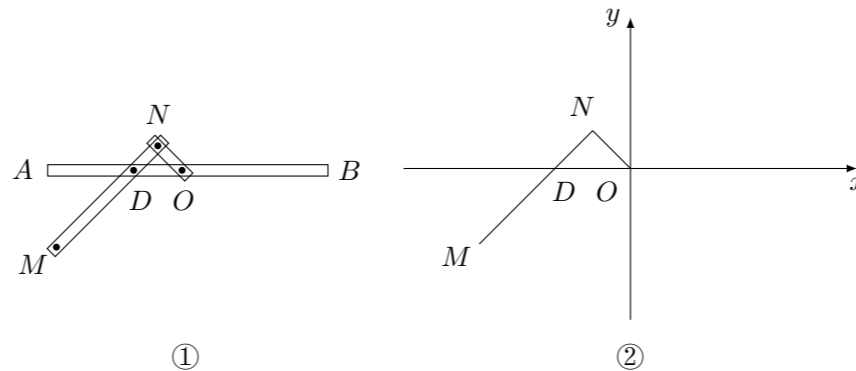
20. 某厂用鲜牛奶在某台设备上生产 A, B 两种奶制品. 生产 1 吨 A 产品需鲜牛奶 2 吨, 使用设备 1 小时, 获利 1000 元; 生产 1 吨 B 产品需鲜牛奶 1.5 吨, 使用设备 1.5 小时, 获利 1200 元. 要求每天 B 产品的产量不超过 A 产品产量的 2 倍, 设备每天生产 A, B 两种产品时间之和不超过 12 小时. 假定每天可获取的鲜牛奶数量 W (单位: 吨) 是一个随机变量, 其分布列为

W	12	15	18
P	0.3	0.5	0.2

该厂每天根据获取的鲜牛奶数量安排生产, 使其获利最大, 因此每天的最大获利 Z (单位: 元) 是一个随机变量.

- (1) 求 Z 的分布列和均值;
- (2) 若每天可获取的鲜牛奶数量相互独立, 求 3 天中至少有 1 天的最大获利超过 10000 元的概率.

21. 一种作图工具如图①所示. O 是滑槽 AB 的中点, 短杆 ON 可绕 O 转动, 长杆 MN 通过 N 处铰链与 ON 连接, MN 上的栓子 D 可沿滑槽 AB 滑动, 且 $DN = ON = 1, MN = 3$. 当栓子 D 在滑槽 AB 内作往复运动时, 带动 N 绕 O 转动一周 (D 不动时, N 也不动), M 处的笔尖画出的曲线记为 C . 以 O 为原点, AB 所在的直线为 x 轴建立如图②所示的平面直角坐标系.
- (1) 求曲线 C 的方程;
- (2) 设动直线 l 与两定直线 $l_1: x - 2y = 0$ 和 $l_2: x + 2y = 0$ 分别交于 P, Q 两点. 若直线 l 总与曲线 C 有且只有一个公共点, 试探究: $\triangle OPQ$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 求出该最小值; 若不存在, 说明理由.



22. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $b_n = n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n a_n$ ($n \in \mathbf{N}_+$), e 为自然对数的底数.
- (1) 求函数 $f(x) = 1 + x - e^x$ 的单调区间, 并比较 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 与 e 的大小;
- (2) 计算 $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}, \frac{b_1 b_2 b_3}{a_1 a_2 a_3}$, 由此推测计算 $\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 的公式, 并给出证明;
- (3) 令 $c_n = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$, 数列 $\{a_n\}, \{c_n\}$ 的前 n 项和分别记为 S_n, T_n , 证明: $T_n < e S_n$.