

## 2015 普通高等学校招生考试 (湖南卷文)

### 一、选择题

1. 已知  $\frac{(1-i)^2}{z} = 1+i$  ( $i$  为虚数单位), 则复数  $z =$  ( )  
 (A)  $1+i$  (B)  $1-i$  (C)  $-1+i$  (D)  $-1-i$

2. 在一次马拉松比赛中, 35 名运动员的成绩 (单位: 分钟) 茎叶图如图所示.

13	0	0	3	4	5	6	6	8	8	8	9
14	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5
15	0	1	2	2	3	3	3				

若将运动员按成绩由好到差编为 1~35 号, 再用系统抽样的方法从中抽取 7 人, 则其中成绩在区间  $[139, 151]$  上的运动员的人数是 ( )

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

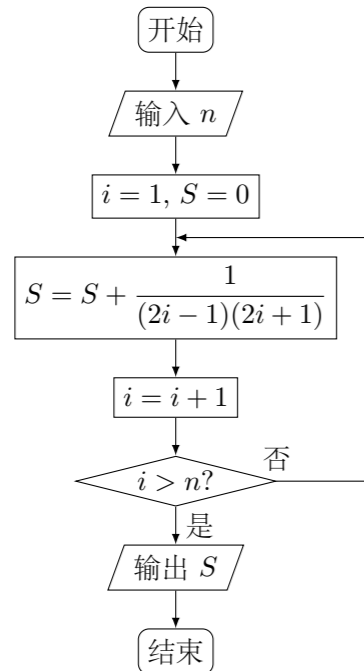
3. 设  $x \in \mathbf{R}$ , 则“ $x > 1$ ”是“ $x^3 > 1$ ”的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件  
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 若变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y \geq 1, \\ y-x \leq 1, \\ x \leq 1, \end{cases}$  则  $z = 2x - y$  的最小值为 ( )

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

5. 执行如图所示的程序框图, 如果输入  $n = 3$ , 则输出的  $S =$  ( )



(A)  $\frac{6}{7}$  (B)  $\frac{3}{7}$  (C)  $\frac{8}{9}$  (D)  $\frac{4}{9}$

6. 若双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的一条渐近线经过点  $(3, -4)$ , 则此双曲线的离心率为 ( )

(A)  $\frac{\sqrt{7}}{3}$  (B)  $\frac{5}{4}$  (C)  $\frac{4}{3}$  (D)  $\frac{5}{3}$

7. 若实数  $a, b$  满足  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \sqrt{ab}$ , 则  $ab$  的最小值为 ( )

(A)  $\sqrt{2}$  (B) 2 (C)  $2\sqrt{2}$  (D) 4

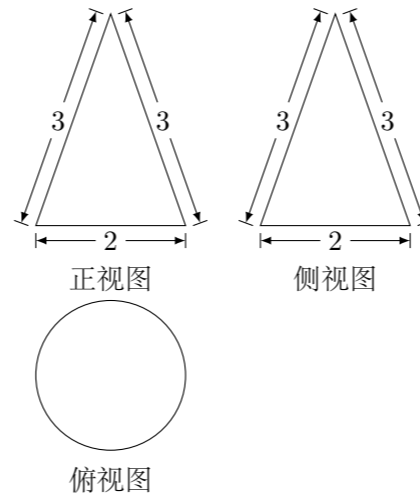
8. 设函数  $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ , 则  $f(x)$  是 ( )

(A) 奇函数, 且在  $(0, 1)$  是增函数 (B) 奇函数, 且在  $(0, 1)$  是减函数  
 (C) 偶函数, 且在  $(0, 1)$  是增函数 (D) 偶函数, 且在  $(0, 1)$  是减函数

9. 已知点  $A, B, C$  在圆  $x^2 + y^2 = 1$  上运动, 且  $AB \perp BC$ . 若点  $P$  的坐标为  $(2, 0)$ , 则  $|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}|$  的最大值为 ( )

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

10. 某工件的三视图如图所示, 现将该工件通过切削, 加工成一个体积尽可能大的正方体新工件, 并使新工件的一个面落在原工件的一个面内, 则原工件材料的利用率为 (材料的利用率 =  $\frac{\text{新工件的体积}}{\text{原工件的体积}}$ ) ( )



(A)  $\frac{8}{9\pi}$  (B)  $\frac{8}{27\pi}$  (C)  $\frac{24(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$  (D)  $\frac{8(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$

### 二、填空题

11. 已知集合  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $A = \{1, 3\}$ ,  $B = \{1, 3, 4\}$ , 则  $A \cup (\complement_U B) =$ \_\_\_\_\_.

12. 在直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系. 若曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 2 \sin \theta$ , 则曲线  $C$  的直角坐标方程为\_\_\_\_\_.

13. 若直线  $3x - 4y + 5 = 0$  与圆  $x^2 + y^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 相交于  $A, B$  两点, 且  $\angle AOB = 120^\circ$  ( $O$  为坐标原点), 则  $r =$ \_\_\_\_\_.

14. 若函数  $f(x) = |2^x - 2| - b$  有两个零点, 则实数  $b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 已知  $\omega > 0$ , 在函数  $y = 2 \sin \omega x$  与  $y = 2 \cos \omega x$  的图象的交点中, 距离最短的两个交点的距离为  $2\sqrt{3}$ , 则  $\omega =$ \_\_\_\_\_.

### ( ) 三、解答题

16. 某商场举行有奖促销活动, 顾客购买一定金额的商品后即可抽奖, 抽奖方法是: 从装有 2 个红球  $A_1, A_2$  和 1 个白球  $B$  的甲箱与装有 2 个红球  $a_1, a_2$  和 2 个白球  $b_1, b_2$  的乙箱中, 各随机摸出 1 个球, 若摸出的 2 个球都是红球则中奖, 否则不中奖.

(1) 用球的标号列出所有可能的摸出结果;

(2) 有人认为: 两个箱子中的红球比白球多, 所以中奖的概率大于不中奖的概率, 你认为正确吗? 请说明理由.

17. 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $a = b \tan A$ .

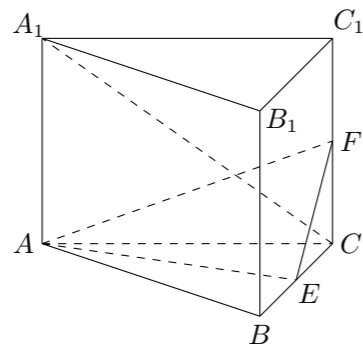
(1) 证明:  $\sin B = \cos A$ ;

(2) 若  $\sin C - \sin A \cos B = \frac{3}{4}$ , 且  $B$  为钝角, 求  $A, B, C$ .

18. 如图, 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的底面是边长为 2 的正三角形,  $E, F$  分别是  $BC, CC_1$  的中点.

(1) 证明: 平面  $AEF \perp$  平面  $B_1BCC_1$ ;

(2) 若直线  $A_1C$  与平面  $A_1ABB_1$  所成的角为  $45^\circ$ , 求三棱锥  $F - AEC$  的体积.



20. 已知抛物线  $C_1: x^2 = 4y$  的焦点  $F$  也是椭圆  $C_2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点,  $C_1$  与  $C_2$  的公共弦长为  $2\sqrt{6}$ . 过点  $F$  的直线  $l$  与  $C_1$  相交于  $A, B$  两点, 与  $C_2$  相交于  $C, D$  两点, 且  $\vec{AC}$  与  $\vec{BD}$  同向.

(1) 求  $C_2$  的方程;

(2) 若  $|AC| = |BD|$ , 求直线  $l$  的斜率.

21. 已知  $a > 0$ , 函数  $f(x) = ae^x \cos x (x \in [0, +\infty))$ . 记  $x_n$  为  $f(x)$  的从小到大的第  $n (n \in \mathbf{N}^*)$  个极值点.

(1) 证明: 数列  $\{f(x_n)\}$  是等比数列;

(2) 若对一切  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $x_n \leq |f(x_n)|$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

19. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ . 已知  $a_1 = 1, a_2 = 2$ , 且  $a_{n+2} = 3S_n - S_{n+1} + 3, n \in \mathbf{N}^*$ .

(1) 证明:  $a_{n+2} = 3a_n$ ;

(2) 求  $S_n$ .