

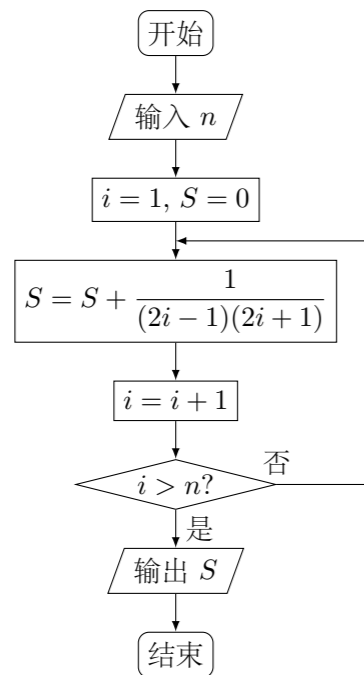
2015 普通高等学校招生考试 (湖南卷理)

一、选择题

1. 已知 $\frac{(1-i)^2}{z} = 1+i$ (i 为虚数单位), 则复数 $z =$ ()
 (A) $1+i$ (B) $1-i$ (C) $-1+i$ (D) $-1-i$

2. 设 A, B 是两个集合, 则“ $A \cap B = A$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

3. 执行如图所示的程序框图, 如果输入 $n = 3$, 则输出的 $S =$ ()



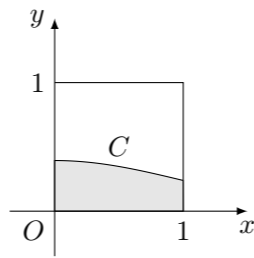
- (A) $\frac{6}{7}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{8}{9}$ (D) $\frac{4}{9}$

4. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq -1, \\ 2x-y \leq 1, \\ y \leq 1, \end{cases}$ 则 $z = 3x - y$ 的最小值为 ()
 (A) -7 (B) -1 (C) 1 (D) 2

5. 设函数 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, 则 $f(x)$ 是 ()
 (A) 奇函数, 且在 $(0, 1)$ 是增函数 (B) 奇函数, 且在 $(0, 1)$ 是减函数
 (C) 偶函数, 且在 $(0, 1)$ 是增函数 (D) 偶函数, 且在 $(0, 1)$ 是减函数

6. 已知 $(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}})^5$ 的展开式中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 的项的系数为 30, 则 $a =$ ()
 (A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$ (C) 6 (D) -6

7. 在如图所示的正方形中随机投掷 10000 个点, 则落入阴影部分 (曲线 C 为正态分布 $N(0, 1)$ 的密度曲线) 的点的个数的估计值为 ()



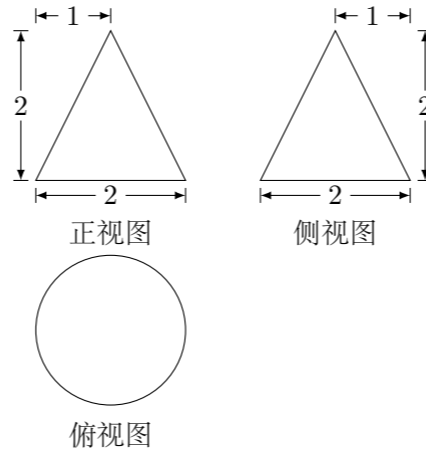
附: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

- (A) 2386 (B) 2718 (C) 3413 (D) 4772

8. 已知点 A, B, C 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上运动, 且 $AB \perp BC$. 若点 P 的坐标为 $(2, 0)$, 则 $|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}|$ 的最大值为 ()
 (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

9. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若对满足 $|f(x_1) - g(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{3}$, 则 $\varphi =$ ()
 (A) $\frac{5\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

10. 某工件的三视图如图所示, 现将该工件通过切削, 加工成一个体积尽可能大的长方体新工件, 并使新工件的一个面落在原工件的一个面内, 则原工件材料的利用率为 (材料的利用率 = $\frac{\text{新工件的体积}}{\text{原工件的体积}}$) ()



- (A) $\frac{8}{9\pi}$ (B) $\frac{16}{9\pi}$ (C) $\frac{4(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$ (D) $\frac{12(\sqrt{2}-1)^3}{\pi}$

二、填空题

11. $\int_0^2 (x-1) dx =$ _____.

12. 在一次马拉松比赛中, 35 名运动员的成绩 (单位: 分钟) 茎叶图如图所示.

13	0	0	3	4	5	6	6	8	8	8	9						
14	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	8
15	0	1	2	2	3	3	3										

若将运动员按成绩由好到差编为 1~35 号, 再用系统抽样的方法从中抽取 7 人, 则其中成绩在区间 $[139, 151]$ 上的运动员的人数是_____.

13. 设 F 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一个焦点, 若 C 上存在点 P , 使线段 PF 的中点恰为其虚轴的一个端点, 则 C 的离心率为_____.

14. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1 = 1$, 且 $3S_1, 2S_2, S_3$ 成等差数列, 则 $a_n =$ _____.

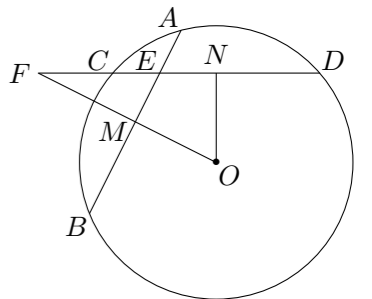
15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq a, \\ x^2, & x > a, \end{cases}$ 若存在实数 b , 使函数 $g(x) = f(x) - b$ 有两个零点, 则 a 的取值范围是_____.

三、解答题

16. 三选二.

【A】如图, 在 $\odot O$ 中, 相交于点 E 的两弦 AB, CD 的中点分别是 M, N , 直线 MO 与直线 CD 相交于点 F . 证明:

- (1) $\angle MEN + \angle NOM = 180^\circ$;
 (2) $FE \cdot FN = FM \cdot FO$.



【B】已知直线 $l: \begin{cases} x = 5 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = \sqrt{3} + \frac{1}{2}t, \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2 \cos \theta$.

- (1) 将曲线 C 的极坐标方程化为直角坐标方程;
 (2) 设点 M 的直角坐标为 $(5, \sqrt{3})$, 直线 l 与曲线 C 的交点为 A, B , 求 $|MA| \cdot |MB|$ 的值.

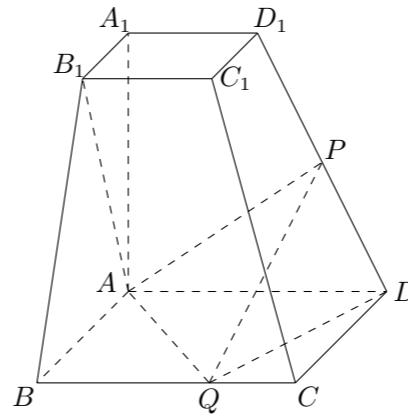
【C】设 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, 证明:

- (1) $a + b \geq 2$;
 (2) $a^2 + a < 2$ 与 $b^2 + b < 2$ 不可能同时成立.

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = b \tan A$, 且 B 为钝角.
- (1) 证明: $B - A = \frac{\pi}{2}$;
- (2) 求 $\sin A + \sin C$ 的取值范围.

18. 某商场举行有奖促销活动, 顾客购买一定金额的商品后即可抽奖, 每次抽奖都是从装有 4 个红球、6 个白球的甲箱和装有 5 个红球、5 个白球的乙箱中, 各随机摸出 1 个球. 在摸出的 2 个球中, 若都是红球, 则获一等奖; 若只有 1 个红球, 则获二等奖; 若没有红球, 则不获奖.
- (1) 求顾客抽奖 1 次能获奖的概率;
- (2) 若某顾客有 3 次抽奖的机会, 记该顾客在 3 次抽奖中获一等奖的次数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

19. 如图, 已知四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的上、下底面分别是边长为 3 和 6 的正方形, $AA_1 = 6$, 且 $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, 点 P, Q 分别在棱 DD_1, BC 上.
- (1) 若点 P 是 DD_1 的中点, 证明: $AB_1 \perp PQ$;
- (2) 若 $PQ \parallel$ 平面 ABB_1A_1 , 二面角 $P - QD - A$ 的余弦值为 $\frac{3}{7}$, 求四面体 $ADPQ$ 的体积.



20. 已知抛物线 $C_1: x^2 = 4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个焦点, C_1 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$.
- (1) 求 C_2 的方程;
- (2) 过点 F 的直线 l 与 C_1 相交于 A, B 两点, 与 C_2 相交于 C, D 两点, 且 \overrightarrow{AC} 与 \overrightarrow{BD} 同向.
- ① 若 $|AC| = |BD|$, 求直线 l 的斜率;
- ② 设 C_1 在点 A 处的切线与 x 轴的交点为 M , 证明: 直线 l 绕点 F 旋转时, $\triangle MFD$ 总是钝角三角形.

21. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = e^{ax} \sin x$ ($x \in [0, +\infty)$), 记 x_n 为 $f(x)$ 的从小到大的第 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 个极值点. 证明:
- (1) 数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列;
- (2) 若 $a \geq \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}$, 则对一切 $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n < |f(x_n)|$ 恒成立.