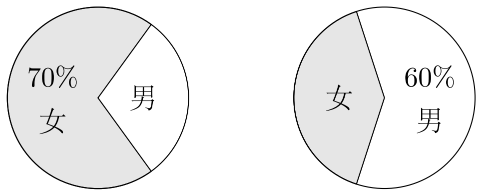
2015 普通高等学校招生考试 (陕西卷理)

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x\mid x^2=x\}$, $N=\{x\mid \lg x\leqslant 0\}$, 则 $M\cup N=$ ( )

(A) $[0,1]$ (B) $(0,1]$ (C) $[0,1)$ (D) $(-\infty,1]$

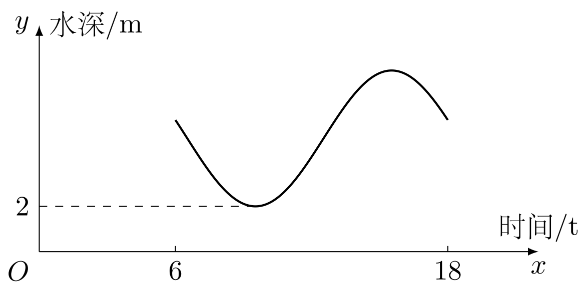
2. 某中学初中部共有 110 名教师, 高中部共有 150 名教师, 其性别比例如图所示, 则该校女教师的人数为 ( )



(初中部) (高中部)

(A) 93 (B) 123 (C) 137 (D) 167

3. 如图, 某港口一天 6 时到 18 时的水深变化曲线近似满足函数 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)+k$. 据此函数可知, 这段时间水深 (单位: m) 的最大值为 ( )

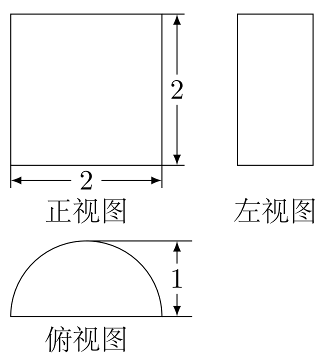


(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 10

4. 二项式 $(x+1)^n$ $(n\in\mathbf{N}_+)$ 的展开式中 x^2 的系数为 15, 则 $n=$ ( )

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4

5. 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 ( )



(A) 3π (B) 4π (C) $2\pi+4$ (D) $3\pi+4$

6. “$\sin\alpha=\cos\alpha$”是“$\cos 2\alpha=0$”的 ( )

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

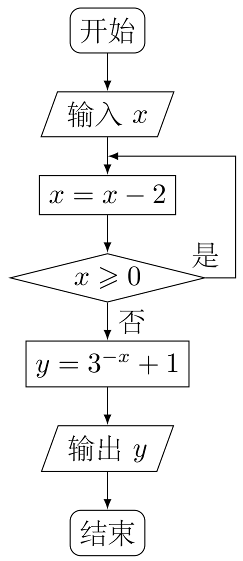
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要

7. 对任意向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 下列关系式中不恒成立的是 ( )

(A) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$ (B) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$

(C) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$ (D) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$

8. 根据框图, 当输入 x 为 2006 时, 输出的 $y=$ ( )



(A) 28 (B) 10 (C) 4 (D) 2

9. 设 $f(x)=\ln x$, $0<a<b$, 若 $p=f\left(\sqrt{ab}\right)$, $q=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $r=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$, 则下列关系式中正确的是 ( )

(A) $q=r<p$ (B) $q=r>p$ (C) $p=r<q$ (D) $p=r>q$

10. 某企业生产甲、乙两种产品均需用 A, B 两种原料, 已知生产 1 吨每种产品所需原料及每天原料的可用限额如表所示. 如果生产 1 吨甲、乙产品可获利润分别为 3 万元、4 万元, 则该企业每天可获得最大利润为 ( )

	甲	乙	原料限额
A (吨)	3	2	12
B (吨)	1	2	8

(A) 12 万元 (B) 16 万元 (C) 17 万元 (D) 18 万元

11. 设复数 $z=(x-1)+y\mathrm{i}$ $(x,\ y\in\mathbf{R})$, 若 $|z|\leqslant 1$, 则 $y\geqslant x$ 的概率为 ( )

(A) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}$ (B) $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$ (C) $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$ (D) $\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}$

12. 对二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a 为非零整数), 四位同学分别给出下列结论, 其中有且只有一个结论是错误的, 则错误的结论是 ( )

(A) -1 是 $f(x)$ 的零点 (B) 1 是 $f(x)$ 的极值点

(C) 3 是 $f(x)$ 的极值 (D) 点 $(2,8)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上

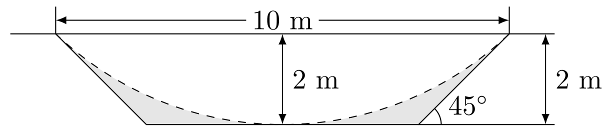
二、填空题

13. 中位数为 1010 的一组数构成等差数列, 其末项为 2015, 则该数列的首项为______.

14. 若抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的准线经过双曲线 $x^2-y^2=1$ 的一个焦点, 则 $p=$______.

15. 设曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$ 上点 P 处的切线垂直, 则 P 的坐标为______.

16. 如图, 一横截面为等腰梯形的水渠, 因泥沙沉积, 导致水渠截面边界呈抛物线型 (图中虚线所示), 则原始的最大流量与当前最大流量的比值为______.



三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 向量 $\boldsymbol{m}=\left(a,\sqrt{3}b\right)$ 与 $\boldsymbol{n}=(\cos A,\sin B)$ 平行.

(1) 求 A;

(2) 若 $a=\sqrt{7}$, $b=2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 如图 1, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, $\angle BAD=\frac{\pi}{2}$, $AB=BC=1$, $AD=2$, E 是 AD 的中点, O 是 AC 与 BE 的交点. 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起到 $\triangle A_1BE$ 的位置, 如图 2.

(1) 证明: $CD\perp$ 平面 A_1OC;

(2) 若平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$, 求平面 A_1BC 与平面 A_1CD 夹角的余弦值.

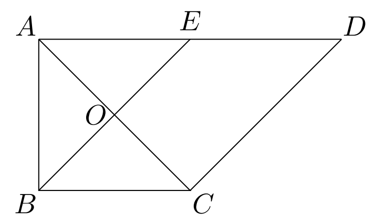


图 1

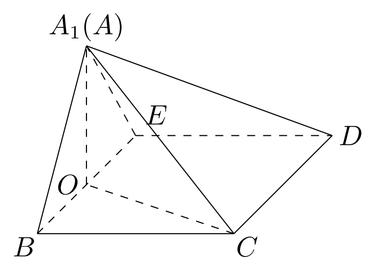


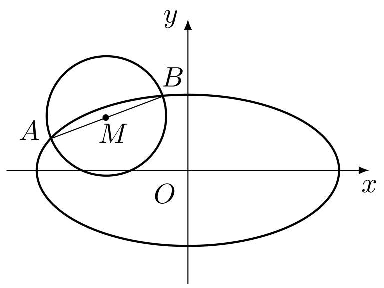
图 2

19. 设某校新、老校区之间开车单程所需时间为 T, T 只与道路畅通状况有关, 对其容量为 100 的样本进行统计, 结果如下:

T (分钟)	25	30	35	40
频数 (次)	20	30	40	10

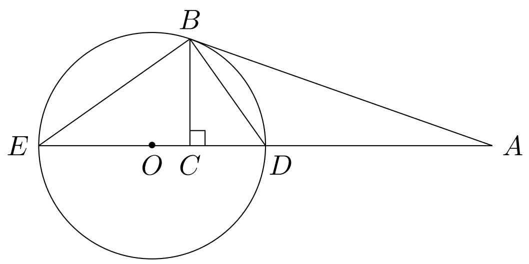
(1) 求 T 的分布列与数学期望 ET;
(2) 刘教授驾车从老校区出发, 前往新校区做一个 50 分钟的讲座, 结束后立即返回老校区, 求刘教授从离开老校区到返回老校区共用时间不超过 120 分钟的概率.

20. 已知椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的半焦距为 c, 原点 O 到经过两点 $(c,0)$, $(0,b)$ 的直线的距离为 $\dfrac{1}{2}c$.
(1) 求椭圆 E 的离心率;
(2) 如图, AB 是圆 M: $(x+2)^2+(y-1)^2=\dfrac{5}{2}$ 的一条直径, 若椭圆 E 经过 A, B 两点, 求椭圆 E 的方程.



21. 设 $f_n(x)$ 是等比数列 1, x, x^2, $\cdots$, x^n 的各项和, 其中 $x>0$, $n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 2$.
(1) 证明: 函数 $F_n(x)=f_n(x)-2$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个零点 (记为 x_n), 且 $x_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x_n^{n+1}$;
(2) 设有一个与上述等比数列的首项、末项、项数分别相同的等差数列, 其各项和为 $g_n(x)$, 比较 $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 的大小, 并加以证明.

22. 如图, AB 切 $\odot O$ 于点 B, 直线 AO 交 $\odot O$ 于 D, E 两点, $BC\perp DE$, 垂足为 C.
(1) 证明: $\angle CBD=\angle DBA$;
(2) 若 $AD=3DC$, $BC=\sqrt{2}$, 求 $\odot O$ 的直径.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=3+\dfrac{1}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\end{cases}$ (t 为参数), 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, $\odot C$ 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{3}\sin\theta$.
(1) 写出 $\odot C$ 的直角坐标方程;
(2) P 为直线 l 上一动点, 当 P 到圆心 C 的距离最小时, 求 P 的直角坐标.

24. 已知关于 x 的不等式 $|x+a|<b$ 的解集为 $\{x\mid 2<x<4\}$.
(1) 求实数 a, b 的值;
(2) 求 $\sqrt{at+12}+\sqrt{bt}$ 的最大值.