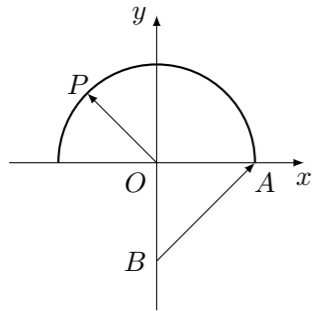


## 2016 普通高等学校招生考试 (上海卷文)

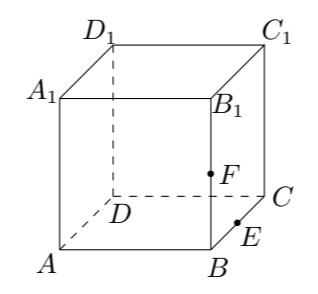
### 一、填空题

1. 设  $x \in \mathbf{R}$ , 则不等式  $|x-3| < 1$  的解集为\_\_\_\_\_.
2. 设  $z = \frac{3+2i}{i}$ , 其中  $i$  为虚数单位, 则  $z$  的虚部等于\_\_\_\_\_.
3. 已知平行直线  $l_1: 2x+y-1=0$ ,  $l_2: 2x+y+1=0$ , 则  $l_1$  与  $l_2$  的距离是\_\_\_\_\_.
4. 某次体检, 5 位同学的身高 (单位: 米) 分别为 1.72, 1.78, 1.80, 1.69, 1.76, 则这组数据的中位数是\_\_\_\_\_ (米).
5. 若函数  $f(x) = 4\sin x + a\cos x$  的最大值为 5, 则常数  $a =$ \_\_\_\_\_.
6. 已知点  $(3, 9)$  在函数  $f(x) = 1 + a^x$  的图象上, 则  $f(x)$  的反函数  $f^{-1}(x) =$ \_\_\_\_\_.
7. 若  $x, y$  满足  $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ y \geq x+1, \end{cases}$  则  $x-2y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
8. 方程  $3\sin x = 1 + \cos 2x$  在区间  $[0, 2\pi]$  上的解为\_\_\_\_\_.
9. 在  $(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x})^n$  的二项展开式中, 所有项的二项式系数之和为 256, 则常数项等于\_\_\_\_\_.
10. 已知  $\triangle ABC$  的三边长分别为 3, 5, 7, 则该三角形的外接圆半径等于\_\_\_\_\_.
11. 某食堂规定, 每份午餐可以在四种水果中任选两种, 则甲、乙两同学各自所选的两种水果相同的概率为\_\_\_\_\_.
12. 如图, 已知点  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $B(0, -1)$ ,  $P$  是曲线  $y = \sqrt{1-x^2}$  上一个动点, 则  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BA}$  的取值范围是\_\_\_\_\_.



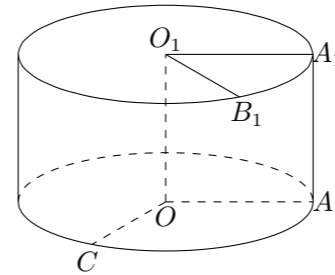
13. 设  $a > 0, b > 0$ , 若关于  $x, y$  的方程组  $\begin{cases} ax+y=1, \\ x+by=1 \end{cases}$  无解, 则  $a+b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
14. 无穷数列  $\{a_n\}$  由  $k$  个不同的数组成,  $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和. 若对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $S_n \in \{2, 3\}$ , 则  $k$  的最大值为\_\_\_\_\_.

### 二、选择题

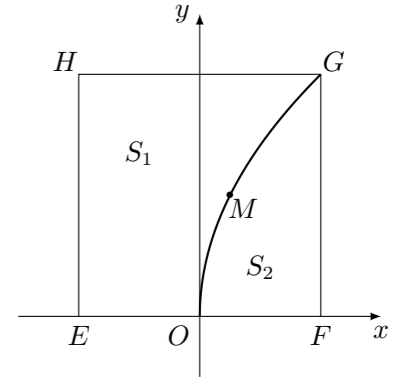
15. 设  $a \in \mathbf{R}$ , 则“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > 1$ ”的 ( )  
 (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件  
 (C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件
16. 如图, 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  分别为  $BC, BB_1$  的中点, 则下列直线中与直线  $EF$  相交的是 ( )  
  
 (A) 直线  $AA_1$  (B) 直线  $A_1B_1$  (C) 直线  $A_1D_1$  (D) 直线  $B_1C_1$
17. 设  $a \in \mathbf{R}, b \in [0, 2\pi)$ . 若对任意实数  $x$  都有  $\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin(ax + b)$ , 则满足条件的有序实数对  $(a, b)$  的对数为 ( )  
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
18. 设  $f(x), g(x), h(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的三个函数, 对于命题: ① 若  $f(x)+g(x), f(x)+h(x), g(x)+h(x)$  均为增函数, 则  $f(x), g(x), h(x)$  中至少有一个为增函数; ② 若  $f(x)+g(x), f(x)+h(x), g(x)+h(x)$  均是以  $T$  为周期的函数, 则  $f(x), g(x), h(x)$  均是以  $T$  为周期的函数, 下列判断正确的是 ( )  
 (A) ①和②均为真命题 (B) ①和②均为假命题  
 (C) ①为真命题, ②为假命题 (D) ①为假命题, ②为真命题

### 三、解答题

19. 将边长为 1 的正方形  $AA_1O_1O$  (及其内部) 绕  $OO_1$  旋转一周形成圆柱, 如图,  $\widehat{AC}$  长为  $\frac{5\pi}{6}$ ,  $\widehat{A_1B_1}$  长为  $\frac{\pi}{3}$ , 其中  $B_1$  与  $C$  在平面  $AA_1O_1O$  的同侧.  
 (1) 求圆柱的体积与侧面积;  
 (2) 求异面直线  $O_1B_1$  与  $OC$  所成的角的大小.



20. 有一块正方形菜地  $EFGH$ ,  $EH$  所在直线是一条小河, 收获的蔬菜可送到  $F$  点或河边运走. 于是, 菜地分为两个区域  $S_1$  和  $S_2$ , 其中  $S_1$  中的蔬菜运到河边较近,  $S_2$  中的蔬菜运到  $F$  点较近, 而菜地内  $S_1$  和  $S_2$  的分界线  $C$  上的点到河边与到  $F$  点的距离相等, 现建立平面直角坐标系, 其中原点  $O$  为  $EF$  的中点, 点  $F$  的坐标为  $(1, 0)$ , 如图.  
 (1) 求菜地内的分界线  $C$  的方程.  
 (2) 菜农从蔬菜运量估计出  $S_1$  面积是  $S_2$  面积的两倍, 由此得到  $S_1$  面积的“经验值”为  $\frac{8}{3}$ . 设  $M$  是  $C$  上纵坐标为 1 的点, 请计算以  $EH$  为一边, 另一边过点  $M$  的矩形的面积, 及五边形  $EOMGH$  的面积, 并判断哪一个更接近于  $S_1$  面积的经验值.



21. 双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1$ 、 $F_2$ , 直线  $l$  过  $F_2$  且与双曲线交于  $A$ 、 $B$  两点.

(1) 若  $l$  的倾斜角为  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\triangle F_1AB$  是等边三角形, 求双曲线的渐近线方程.

(2) 设  $b = \sqrt{3}$ , 若  $l$  的斜率存在, 且  $|AB| = 4$ , 求  $l$  的斜率.

22. 对于无穷数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$ , 记  $A = \{x \mid x = a_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ ,  $B = \{x \mid x = b_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ , 若同时满足条件: ①  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  均单调递增; ②  $A \cap B = \emptyset$  且  $A \cup B = \mathbf{N}^*$ , 则称  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  是无穷互补数列.

(1) 若  $a_n = 2n - 1$ ,  $b_n = 4n - 2$ , 判断  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  是否为无穷互补数列, 并说明理由;

(2) 若  $a_n = 2^n$  且  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  是无穷互补数列, 求数列  $\{b_n\}$  的前 16 项的和;

(3) 若  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  是无穷互补数列,  $\{a_n\}$  为等差数列且  $a_{16} = 36$ , 求  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  的通项公式.

23. 已知  $a \in \mathbf{R}$ , 函数  $f(x) = \log_2 \left( \frac{1}{x} + a \right)$ .

(1) 当  $a = 1$  时, 解不等式  $f(x) > 1$ ;

(2) 若关于  $x$  的方程  $f(x) + \log_2(x^2) = 0$  的解集中恰有一个元素, 求  $a$  的值;

(3) 设  $a > 0$ , 若对任意  $t \in \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$ , 函数  $f(x)$  在区间  $[t, t+1]$  上的最大值与最小值的差不超过 1, 求  $a$  的取值范围.