2016 普通高等学校招生考试 (上海卷理)

一、填空题

1. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则不等式 $|x-3|<1$ 的解集为______.

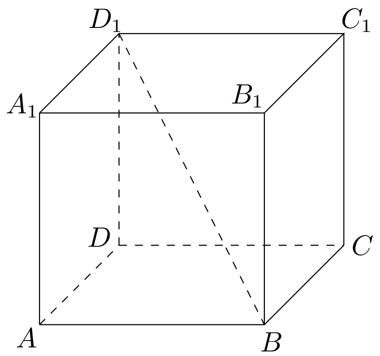
2. 设 $z=\dfrac{3+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $\operatorname{Im} z=$______.

3. 已知平行直线 l_1: $2x+y-1=0$, l_2: $2x+y+1=0$, 则 l_1 与 l_2 的距离是______.

4. 某次体检, 6 位同学的身高 (单位: 米) 分别为 1.72, 1.78, 1.75, 1.80, 1.69, 1.77, 则这组数据的中位数是______(米).

5. 已知点 $(3,9)$ 在函数 $f(x)=1+a^x$ 的图象上, 则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$______.

6. 如图, 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 的边长为 3, BD_1 与底面所成角的大小为 $\arctan\dfrac{2}{3}$, 则该正四棱柱的高等于______.



7. 方程 $3\sin x=1+\cos 2x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的解为______.

8. 在 $\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{x}\right)^n$ 的二项展开式中, 所有项的二项式系数之和为 256, 则常数项等于______.

9. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长为 3, 5, 7, 则该三角形的外接圆半径等于______.

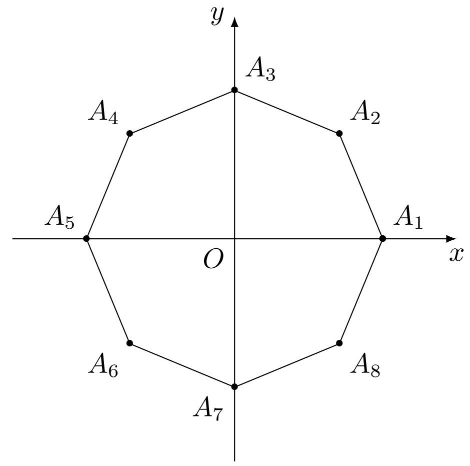
10. 设 $a>0$, $b>0$, 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} ax+y=1, \\ x+by=1 \end{cases}$ 无解, 则 $a+b$ 的取值范围是______.

11. 无穷数列 $\{a_n\}$ 由 k 个不同的数组成, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $S_n\in\{2,\ 3\}$, 则 k 的最大值为______.

12. 在平面直角坐标系中, 已知 $A(1,0)$, $B(0,-1)$, P 是曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上一个动点, 则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BA}$ 的取值范围是______.

13. 设 a, $b\in\mathbf{R}$, $c\in[0,2\pi)$, 若对任意实数 x 都有 $2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=a\sin(bx+c)$, 则满足条件的有序实数组 (a,b,c) 的组数为______.

14. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, O 为正八边形 $A_1A_2\cdots A_8$ 的中心, $A_1(1,0)$, 任取不同的两点 A_i, A_j, 点 P 满足 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}=\vec{0}$, 则点 P 落在第一象限的概率是______.



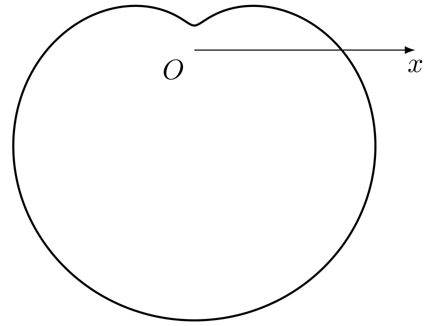
二、选择题

15. 设 $a\in\mathbf{R}$, 则"$a>1$"是"$a^2>1$"的 ( )

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

16. 下列极坐标方程中, 对应的曲线为下图的是 ( )



(A) $\rho=6+5\cos\theta$　　(B) $\rho=6+5\sin\theta$

(C) $\rho=6-5\cos\theta$　　(D) $\rho=6-5\sin\theta$

17. 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q, 前 n 项和为 S_n, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, 下列条件中, 使得 $2S_n<S$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 恒成立的是 ( )

(A) $a_1>0$, $0.6<q<0.7$　　(B) $a_1<0$, $-0.7<q<-0.6$

(C) $a_1>0$, $0.7<q<0.8$　　(D) $a_1<0$, $-0.8<q<-0.7$

18. 设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的三个函数, 对于命题: ① 若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均为增函数, 则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 中至少有一个为增函数; ② 若 $f(x)+g(x)$、$f(x)+h(x)$、$g(x)+h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 下列判断正确的是 ( )

(A) ①和②均为真命题　　(B) ①和②均为假命题

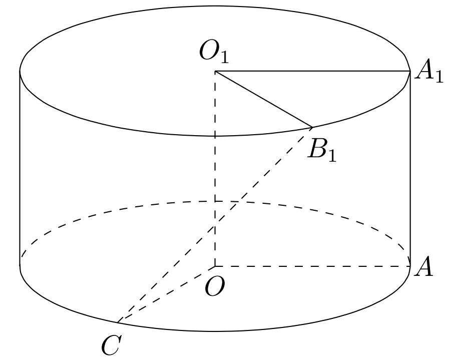
(C) ①为真命题, ②为假命题　　(D) ①为假命题, ②为真命题

三、解答题

19. 将边长为 1 的正方形 AA_1O_1O (及其内部) 绕 OO_1 旋转一周形成圆柱, 如图, $\overset{\frown}{AC}$ 长为 $\dfrac{2\pi}{3}$, $\overset{\frown}{A_1B_1}$ 长为 $\dfrac{\pi}{3}$, 其中 B_1 与 C 在平面 AA_1O_1O 的同侧.

(1) 求三棱锥 $C-O_1A_1B_1$ 的体积.

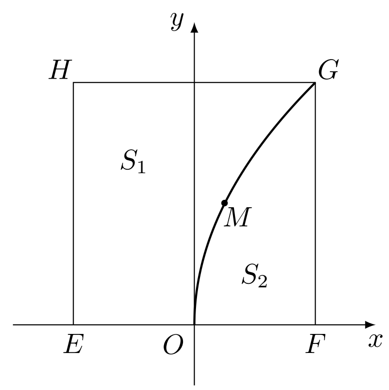
(2) 求异面直线 B_1C 与 AA_1 所成角的大小.



20. 有一块正方形菜地 $EFGH$, EH 所在直线是一条小河, 收获的蔬菜可送到 F 点或河边运走. 于是, 菜地分为两个区域 S_1 和 S_2, 其中 S_1 中的蔬菜运到河边较近, S_2 中的蔬菜运到 F 点较近, 而菜地内 S_1 和 S_2 的分界线 C 上的点到河边与到 F 点的距离相等, 现建立平面直角坐标系, 其中原点 O 为 EF 的中点, 点 F 的坐标为 $(1,0)$, 如图.

(1) 求菜地内的分界线 C 的方程.

(2) 菜农从蔬菜运量估计出 S_1 面积是 S_2 面积的两倍, 由此得到 S_1 面积的"经验值"为 $\dfrac{8}{3}$. 设 M 是 C 上纵坐标为 1 的点, 请计算以 EH 为一边, 另一边过点 M 的矩形的面积, 及五边形 $EOMGH$ 的面积, 并判断哪一个更接近于 S_1 面积的经验值.



21. 双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2, 直线 l 过 F_2 且与双曲线交于 A、B 两点.

(1) 若 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$, $\triangle F_1AB$ 是等边三角形, 求双曲线的渐近线方程.

(2) 设 $b=\sqrt{3}$, 若 l 的斜率存在, 且 $\left(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$, 求 l 的斜率.

22. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\log_2\left(\dfrac{1}{x}+a\right)$.

(1) 当 $a=5$ 时, 解不等式 $f(x)>0$.

(2) 若关于 x 的方程 $f(x)-\log_2[(a-4)x+2a-5]=0$ 的解集中恰有一个元素, 求 a 的取值范围.

(3) 设 $a>0$, 若对任意 $t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1]$ 上的最大值和最小值的差不超过 1, 求 a 的取值范围.

23. 若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: 只要 $a_p=a_q\ (p,\ q\in\mathbf{N}^*)$, 必有 $a_{p+1}=a_{q+1}$, 则称 $\{a_n\}$ 具有性质 P.

(1) 若 $\{a_n\}$ 具有性质 P. 且 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_4=3$, $a_5=2$, $a_6+a_7+a_8=21$, 求 a_3.

(2) 若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为正数的等比数列, $b_1=c_5=1$, $b_5=c_1=81$, $a_n=b_n+c_n$, 判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质 P, 并说明理由;

(3) 设 $\{b_n\}$ 是无穷数列, 已知 $a_{n+1}=b_n+\sin a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$, 求证: "对任意 a_1, $\{a_n\}$ 都具有性质 P"的充要条件为"$\{b_n\}$ 是常数列".