2016 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 理)

一、选择题

1. 设集合 $S=\{x\mid(x-2)(x-3)\geqslant 0\}$, $T=\{x\mid x>0\}$, 则 $S\cap T=$ ( )

(A) $[2,3]$　(B) $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

(C) $[3,+\infty)$　(D) $(0,2]\cup[3,+\infty)$

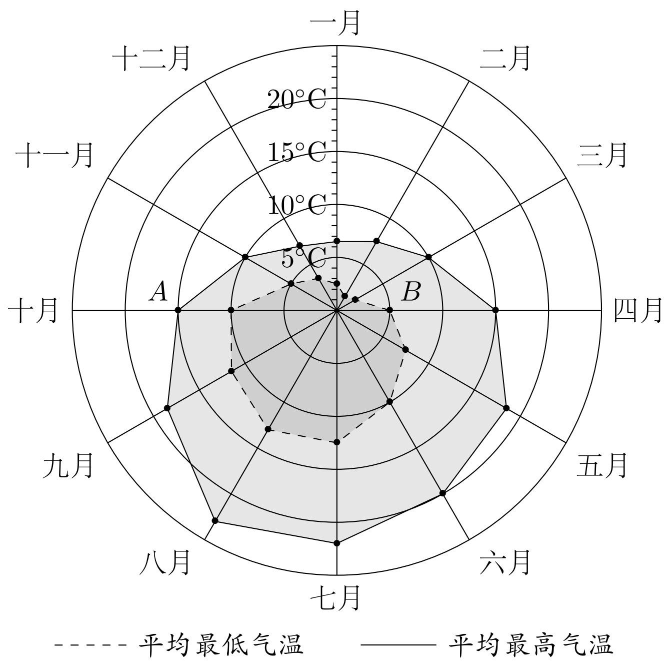
2. 若 $z=1+2\mathrm{i}$, 则 $\dfrac{4\mathrm{i}}{z\bar{z}-1}=$ ( )

(A) 1　(B) -1　(C) i　(D) $-\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, 则 $\angle ABC=$ ( )

(A) 30°　(B) 45°　(C) 60°　(D) 120°

4. 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况, 绘制了一年中月平均最高气温和平均最低气温的雷达图. 图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 $15^\circ\mathrm{C}$, B 点表示四月的平均最低气温约为 $5^\circ\mathrm{C}$. 下面叙述不正确的是 ( )



(A) 各月的平均最低气温都在 $0^\circ\mathrm{C}$ 以上

(B) 七月的平均温差比一月的平均温差大

(C) 三月和十一月的平均最高气温基本相同

(D) 平均气温高于 $20^\circ\mathrm{C}$ 的月份有 5 个

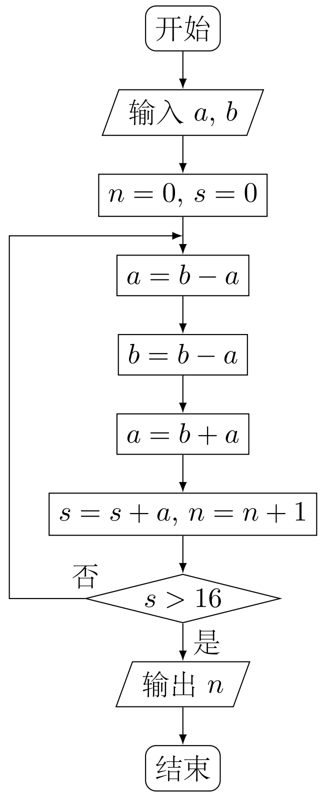
5. 若 $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$, 则 $\cos^2\alpha+2\sin2\alpha=$ ( )

(A) $\dfrac{64}{25}$　(B) $\dfrac{48}{25}$　(C) 1　(D) $\dfrac{16}{25}$

6. 已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$, $b=4^{\frac{2}{5}}$, $c=25^{\frac{1}{3}}$, 则 ( )

(A) $b<a<c$　(B) $a<b<c$　(C) $b<c<a$　(D) $c<a<b$

7. 执行下图的程序框图, 如果输入的 $a=4$, $b=6$, 那么输出的 $n=$ ( )

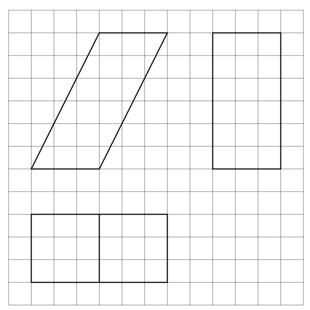


(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $B=\dfrac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$, 则 $\cos A=$ ( )

(A) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　(B) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　(C) $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　(D) $-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

9. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的表面积为 ( )



(A) $18+36\sqrt{5}$　(B) $54+18\sqrt{5}$　(C) 90　(D) 81

10. 在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球, 若 $AB\perp BC$, $AB=6$, $BC=8$, $AA_1=3$, 则 V 的最大值是 ( )

(A) 4π　(B) $\dfrac{9\pi}{2}$　(C) 6π　(D) $\dfrac{32\pi}{3}$

11. 已知 O 为坐标原点, F 是椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点, A, B 分别为 C 的左、右顶点, P 为 C 上一点, 且 $PF\perp x$ 轴. 过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M, 与 y 轴交于点 E. 若直线 BM 经过 OE 的中点, 则 C 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{3}{4}$

12. 定义"规范 01 数列"$\{a_n\}$ 如下: $\{a_n\}$ 共有 $2m$ 项, 其中 m 项为 0, m 项为 1, 且对任意 $k\leqslant 2m$, $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中 0 的个数不少于 1 的个数. 若 $m=4$, 则不同的"规范 01 数列"共有 ( )

(A) 18 个　(B) 16 个　(C) 14 个　(D) 12 个

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ x-2y\leqslant 0,\\ x+2y-2\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为______.

14. 函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象可由函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的图象至少向右平移______个单位长度得到.

15. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x<0$ 时, $f(x)=\ln(-x)+3x$, 则曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,-3)$ 处的切线方程是______.

16. 已知直线 l: $mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A, B 两点, 过 A, B 分别做 l 的垂线与 x 轴交于 C, D 两点, 若 $AB=2\sqrt{3}$, 则 $|CD|=$______.

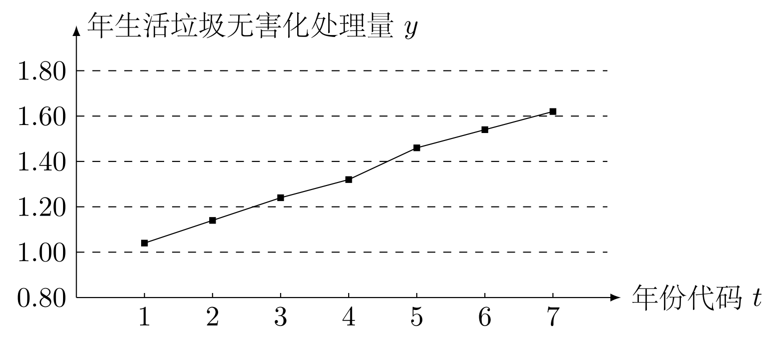
三、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=1+\lambda a_n$, 其中 $\lambda\neq 0$;

(1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列, 并求其通项公式;

(2) 若 $S_5=\dfrac{31}{32}$, 求 λ.

18. 下图是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量 (单位: 亿吨) 的折线图.



注: 年份代码 1 − 7 分别对应年份 2008 − 2014

(1) 由折线图看出, 可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系, 请用相关系数加以说明;

(2) 建立 y 关于 t 的回归方程 (系数精确到 0.01), 预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

参考数据: $\sum\limits_{i=1}^{7} y_i = 9.32$, $\sum\limits_{i=1}^{7} t_i y_i = 40.17$, $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)^2} = 0.55$, $\sqrt{7} \approx 2.646$.

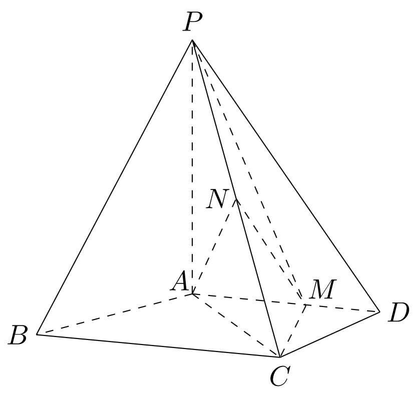
参考公式: 相关系数 $r = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)^2 \sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$.

回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为: $\hat{b} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(t_i-\overline{t}\right)^2}$, $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{t}$.

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB = AD = AC = 3$, $PA = BC = 4$, M 为线段 AD 上一点, $AM = 2MD$, N 为 PC 的中点.

(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 PAB;

(2) 求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.



20. 已知抛物线 C: $y^2 = 2x$ 的焦点为 F, 平行于 x 轴的两条直线 l_1, l_2 分别交 C 于 A, B 两点, 交 C 的准线于 P, Q 两点.

(1) 若 F 在线段 AB 上, R 是 PQ 的中点, 证明 $AR \parallel FQ$;

(2) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍, 求 AB 中点的轨迹方程.

21. 设函数 $f(x) = \alpha\cos 2x + (\alpha-1)(\cos x + 1)$, 其中 $\alpha > 0$, $|f(x)|$ 的最大值为 A.

(1) 求 $f'(x)$;

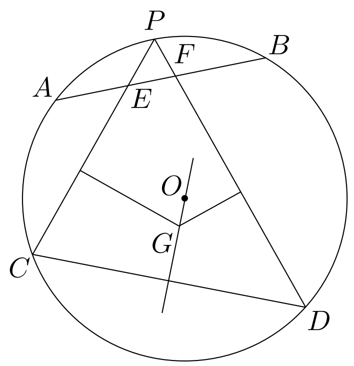
(2) 求 A;

(3) 证明 $|f'(x)| \leqslant 2A$.

22. 如图, $\odot O$ 中 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点为 P, 弦 PC, PD 分别交 AB 于 E, F 两点.

(1) 若 $\angle PFB = 2\angle PCD$, 求 $\angle PCD$ 的大小;

(2) 若 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G, 证明 $OG \perp CD$.



23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\alpha, \\ y = \sin\alpha, \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点, 以 x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$.

(1) 写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设点 P 在 C_1 上, 点 Q 在 C_2 上, 求 $|PQ|$ 的最小值及此时 P 的直角坐标.

24. 已知函数 $f(x) = |2x - a| + a$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \leqslant 6$ 的解集;

(2) 设函数 $g(x) = |2x - 1|$, 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x) + g(x) \geqslant 3$, 求 a 的取值范围.