

2016 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

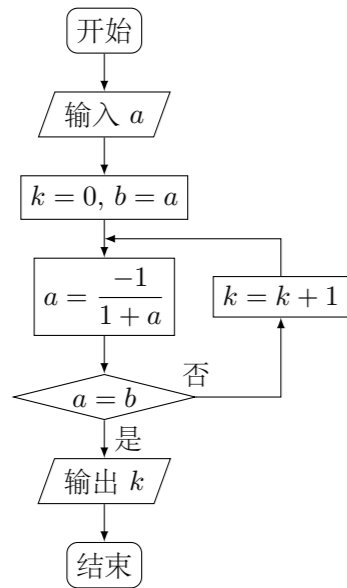
1. 已知集合  $A = \{x \mid |x| < 2\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- (A)  $\{0, 1\}$  (B)  $\{0, 1, 2\}$  (C)  $\{-1, 0, 1\}$  (D)  $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 若  $x, y$  满足  $\begin{cases} 2x - y \leq 0, \\ x + y \leq 3, \\ x \geq 0, \end{cases}$  则  $2x + y$  的最大值为 ( )

- (A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 5

3. 执行如图所示的程序框图, 若输入的  $a$  值为 1, 则输出的  $k$  值为 ( )



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

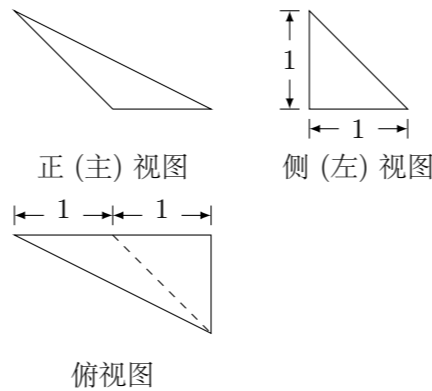
4. 设  $a, b$  是向量, 则“ $|a| = |b|$ ”是“ $|a + b| = |a - b|$ ”的 ( )

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知  $x, y \in \mathbf{R}$ , 且  $x > y > 0$ , 则 ( )

- (A)  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0$  (B)  $\sin x - \sin y > 0$   
(C)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^y < 0$  (D)  $\ln x + \ln y > 0$

6. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积为 ( )



- (A)  $\frac{1}{6}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{2}$  (D) 1

7. 将函数  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  图象上的点  $P\left(\frac{\pi}{4}, t\right)$  向左平移  $s$  ( $s > 0$ ) 个单位长度得到点  $P'$ . 若  $P'$  位于函数  $y = \sin 2x$  的图象上, 则 ( )

- (A)  $t = \frac{1}{2}$ ,  $s$  的最小值为  $\frac{\pi}{6}$  (B)  $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $s$  的最小值为  $\frac{\pi}{6}$   
(C)  $t = \frac{1}{2}$ ,  $s$  的最小值为  $\frac{\pi}{3}$  (D)  $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $s$  的最小值为  $\frac{\pi}{3}$

8. 袋中装有偶数个球, 其中红球、黑球各占一半. 甲、乙、丙是三个空盒. 每次从袋中任意取出两个球, 将其中一个球放入甲盒, 如果这个球是红球, 就将另一个球放入乙盒, 否则就放入丙盒. 重复上述过程, 直到袋中所有球都被放入盒中, 则 ( )

- (A) 乙盒中黑球不多于丙盒中黑球 (B) 乙盒中红球与丙盒中黑球一样多  
(C) 乙盒中红球不多于丙盒中红球 (D) 乙盒中黑球与丙盒中红球一样多

二、填空题

9. 设  $a \in \mathbf{R}$ , 若复数  $(1 + i)(a + i)$  在复平面内对应的点位于实轴上, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

10. 在  $(1 - 2x)^6$  的展开式中,  $x^2$  的系数为\_\_\_\_\_. (用数字作答)

11. 在极坐标系中, 直线  $\rho \cos \theta - \sqrt{3} \rho \sin \theta - 1 = 0$  与圆  $\rho = 2 \cos \theta$  交于  $A, B$  两点, 则  $|AB| =$ \_\_\_\_\_.

12. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和, 若  $a_1 = 6$ ,  $a_3 + a_5 = 0$ , 则  $S_6 =$ \_\_\_\_\_.

13. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的渐近线为正方形  $OABC$  的边  $OA, OC$  所在的直线, 点  $B$  为该双曲线的焦点, 若正方形  $OABC$  的边长为 2, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

14. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq a, \\ -2x, & x > a. \end{cases}$   
① 若  $a = 0$ , 则  $f(x)$  的最大值为\_\_\_\_\_;  
② 若  $f(x)$  无最大值, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

三、解答题

15. 在  $\triangle ABC$  中,  $a^2 + c^2 = b^2 + \sqrt{2}ac$ .

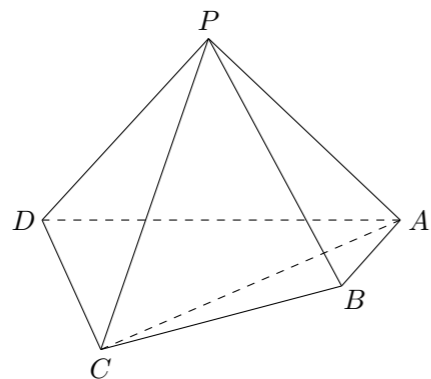
- (1) 求  $\angle B$  的大小;  
(2) 求  $\sqrt{2} \cos A + \cos C$  的最大值.

16.  $A, B, C$  三个班共有 100 名学生, 为调查他们的体育锻炼情况, 通过分层抽样获得了部分学生一周的锻炼时间, 数据如表 (单位: 小时):

A 班	6	6.5	7	7.5	8		
B 班	6	7	8	9	10	11	12
C 班	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12

- (1) 试估计  $C$  班的学生人数;  
(2) 从  $A$  班和  $C$  班抽出的学生中, 各随机选取一个人,  $A$  班选出的人记为甲,  $C$  班选出的人记为乙. 假设所有学生的锻炼时间相对独立, 求该周甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长的概率;  
(3) 再从  $A, B, C$  三班中各随机抽取一名学生, 他们该周锻炼时间分别是 7, 9, 8.25 (单位: 小时), 这 3 个新数据与表格中的数据构成的新样本的平均数记为  $\mu_1$ , 表格中数据的平均数记为  $\mu_0$ , 试判断  $\mu_0$  和  $\mu_1$  的大小. (结论不要求证明)

17. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PA \perp PD$ ,  $PA = PD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $AB = 1$ ,  $AD = 2$ ,  $AC = CD = \sqrt{5}$ .
- (1) 求证:  $PD \perp$  平面  $PAB$ ;
  - (2) 求直线  $PB$  与平面  $PCD$  所成角的正弦值;
  - (3) 在棱  $PA$  上是否存在点  $M$ , 使得  $BM \parallel$  平面  $PCD$ ? 若存在, 求  $\frac{AM}{AP}$  的值; 若不存在, 说明理由.



19. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $\triangle OAB$  的面积为 1.
- (1) 求椭圆  $C$  的方程;
  - (2) 设  $P$  是椭圆  $C$  上一点, 直线  $PA$  与  $y$  轴交于点  $M$ , 直线  $PB$  与  $x$  轴交于点  $N$ . 求证:  $|AN| \cdot |BM|$  为定值.

20. 设数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_N$  ( $N \geq 2$ ). 如果对小于  $n$  ( $2 \leq n \leq N$ ) 的每个正整数  $k$  都有  $a_k < a_n$ , 则称  $n$  是数列  $A$  的一个“ $G$  时刻”. 记  $G(A)$  是数列  $A$  的所有“ $G$  时刻”组成的集合.
- (1) 对数列  $A: -2, 2, -1, 1, 3$ , 写出  $G(A)$  的所有元素;
  - (2) 证明: 若数列  $A$  中存在  $a_n$  使得  $a_n > a_1$ , 则  $G(A) \neq \emptyset$ ;
  - (3) 证明: 若数列  $A$  满足  $a_n - a_{n-1} \leq 1$  ( $n = 2, 3, \dots, N$ ), 则  $G(A)$  的元素个数不小于  $a_N - a_1$ .

18. 设函数  $f(x) = xe^{a-x} + bx$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线方程为  $y = (e-1)x + 4$ .
- (1) 求  $a, b$  的值;
  - (2) 求  $f(x)$  的单调区间.