

2016 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

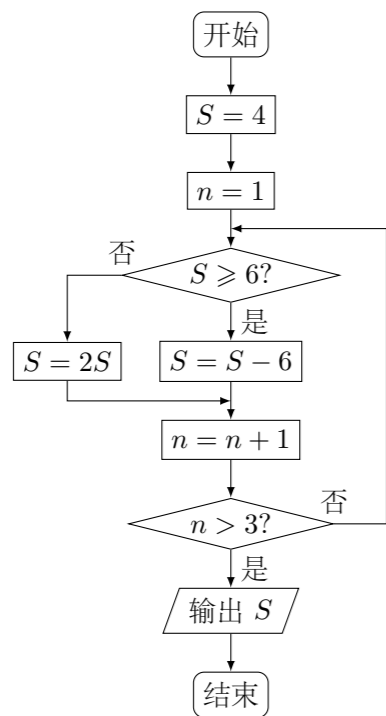
一、选择题

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{y \mid y = 3x - 2, x \in A\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 (A) $\{1\}$ (B) $\{4\}$ (C) $\{1, 3\}$ (D) $\{1, 4\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0, \\ 2x + 3y - 6 \geq 0, \\ 3x + 2y - 9 \leq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = 2x + 5y$ 的最小值为 ()
 (A) -4 (B) 6 (C) 10 (D) 17

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB = \sqrt{13}$, $BC = 3$, $\angle C = 120^\circ$, 则 $AC =$ ()
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 阅读如下的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 S 的值为 ()



- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

5. 设 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等比数列, 公比为 q , 则“ $q < 0$ ”是“对任意的正整数 n , $a_{2n-1} + a_{2n} < 0$ ”的 ()

- (A) 充要条件 (B) 充分而不必要条件
 (C) 必要而不充分条件 (D) 既不充分也不必要条件

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$), 以原点为圆心, 双曲线的实半轴长为半径长的圆与双曲线的两条渐近线相交于 A, B, C, D 四点, 四边形 $ABCD$ 的面积为 $2b$, 则双曲线的方程为 ()

- (A) $\frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{4y^2}{3} = 1$ (C) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ (D) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

7. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, 点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点, 连接 DE 并延长到点 F , 使得 $DE = 2EF$, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的值为 ()
 (A) $-\frac{8}{5}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{11}{8}$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + (4a - 3)x + 3a, & x < 0, \\ \log_a(x + 1) + 1, & x \geq 0, \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在 \mathbf{R} 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)| = 2 - x$ 恰好有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是 ()

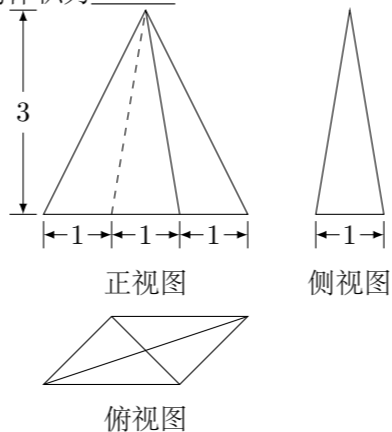
- (A) $(0, \frac{2}{3}]$ (B) $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$
 (C) $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup \{\frac{3}{4}\}$ (D) $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup \{\frac{3}{4}\}$

二、填空题

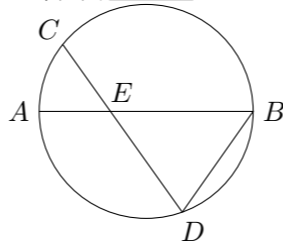
9. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位, 若 $(1 + i)(1 - bi) = a$, 则 $\frac{a}{b}$ 的值为_____.

10. $(x^2 - \frac{1}{x})^8$ 的展开式中 x^7 的系数为_____. (用数字作答)

11. 已知一个四棱锥的底面是平行四边形, 该四棱锥的三视图如图所示 (单位: m), 则该四棱锥的体积为_____ m^3 .



12. 如图, AB 是圆的直径, 弦 CD 与 AB 相交于点 E , $BE = 2AE = 2$, $BD = ED$, 则线段 CE 的长为_____.



13. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增. 若实数 a 满足 $f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2})$, 则 a 的取值范围是_____.

14. 设抛物线 $\begin{cases} x = 2pt^2, \\ y = 2pt, \end{cases}$ (t 为参数, $p > 0$) 的焦点为 F , 准线为 l . 过抛物线

上一点 A 作 l 的垂线, 垂足为 B . 设 $C(\frac{7}{2}p, 0)$, AF 与 BC 相交于点 E . 若 $|CF| = 2|AF|$, 且 $\triangle ACE$ 的面积为 $3\sqrt{2}$, 则 p 的值为_____.

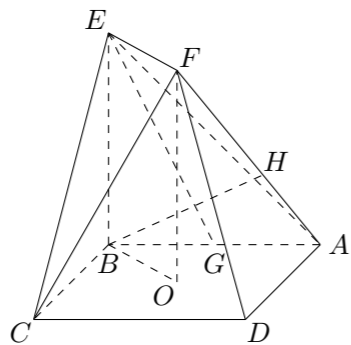
三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = 4 \tan x \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cos(x - \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}$.
 (1) 求 $f(x)$ 的定义域与最小正周期;
 (2) 讨论 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调性.

16. 某小组共 10 人, 利用假期参加义工活动, 已知参加义工活动次数为 1, 2, 3 的人数分别为 3, 3, 4. 现从这 10 人中随机选出 2 人作为该组代表参加座谈会.

- (1) 设 A 为事件“选出的 2 人参加义工活动次数之和为 4”, 求事件 A 发生的概率;
 (2) 设 X 为选出的 2 人参加义工活动次数之差的绝对值, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

17. 如图, 正方形 $ABCD$ 的中心为 O , 四边形 $OBEF$ 为矩形, 平面 $OBEF \perp$ 平面 $ABCD$, 点 G 为 AB 的中点, $AB = BE = 2$.
- (1) 求证: $EG \parallel$ 平面 ADF ;
 - (2) 求二面角 $O-EF-C$ 的正弦值;
 - (3) 设 H 为线段 AF 上的点, 且 $AH = \frac{2}{3}HF$, 求直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值.



19. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > \sqrt{3}$) 的右焦点为 F , 右顶点为 A . 已知 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$, 其中 O 为原点, e 为椭圆的离心率.
- (1) 求椭圆的方程;
 - (2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上), 垂直于 l 的直线与 l 交于点 M , 与 y 轴交于点 H . 若 $BF \perp HF$, 且 $\angle MOA \leq \angle MAO$, 求直线 l 的斜率的取值范围.

20. 设函数 $f(x) = (x-1)^3 - ax - b$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
 - (2) 若 $f(x)$ 存在极值点 x_0 , 且 $f(x_1) = f(x_0)$, 其中 $x_1 \neq x_0$, 求证: $x_1 + 2x_0 = 3$;
 - (3) 设 $a > 0$, 函数 $g(x) = |f(x)|$, 求证: $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.

18. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, 公差为 d , 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, b_n 是 a_n 和 a_{n+1} 的等比中项.
- (1) 设 $c_n = b_{n+1}^2 - b_n^2$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列;
 - (2) 设 $a_1 = d$, $T_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k^2$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求证: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k} < \frac{1}{2d^2}$.