2016 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{-1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{x\,|\,-2<x<3\}$, 则 $A\cap B=$______.

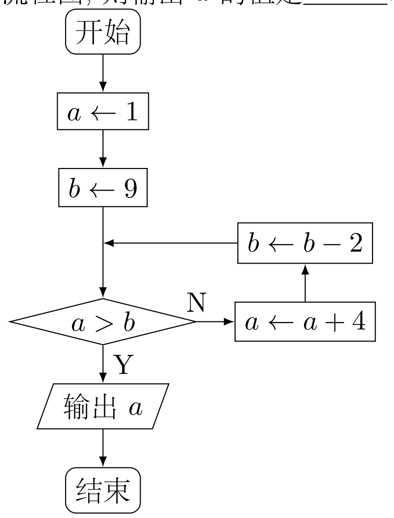
2. 复数 $z=(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$, 其中 i 为虚数单位, 则 z 的实部是______.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的焦距是______.

4. 已知一组数据 4.7, 4.8, 5.1, 5.4, 5.5, 则该组数据的方差是______.

5. 函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是______.

6. 如图是一个算法的流程图, 则输出 a 的值是______.

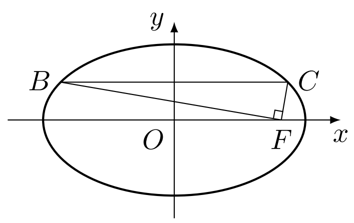


7. 将一个质地均匀的骰子 (一种各个面上分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6 六个点的正方体玩具) 先后抛掷 2 次, 则出现向上的点数之和小于 10 的概率是______.

8. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和. 若 $a_1+a_2^2=-3$, $S_5=10$, 则 a_9 的值是______.

9. 定义在区间 $[0,3\pi]$ 上的函数 $y=\sin 2x$ 的图象与 $y=\cos x$ 的图象的交点个数是______.

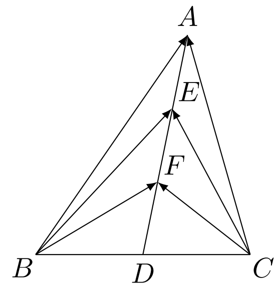
10. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点, 直线 $y=\dfrac{b}{2}$ 与椭圆交于 B, C 两点, 且 $\angle BFC=90^\circ$, 则该椭圆的离心率是______.



11. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数, 在区间 $[-1,1)$ 上 $f(x)=\begin{cases}x+a, & -1\leqslant x<0,\\ \left|\dfrac{2}{5}-x\right|, & 0\leqslant x<1,\end{cases}$ 其中 $a\in\mathbf{R}$. 若 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=f\left(\dfrac{9}{2}\right)$, 则 $f(5a)$ 的值是______.

12. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases}x-2y+4\geqslant 0,\\ 2x+y-2\geqslant 0,\\ 3x-y-3\leqslant 0,\end{cases}$ 则 x^2+y^2 的取值范围是______.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E, F 是 AD 上两个三等分点, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$, $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$, 则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$ 的值是______.

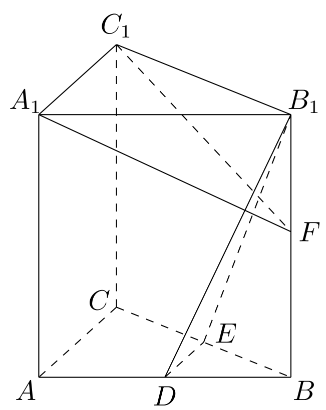


14. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\sin A=2\sin B\sin C$, 则 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是______.

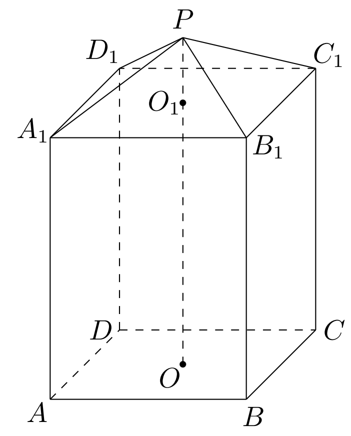
二、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=6$, $\cos B=\dfrac{4}{5}$, $C=\dfrac{\pi}{4}$.
(1) 求 AB 的长;
(2) 求 $\cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

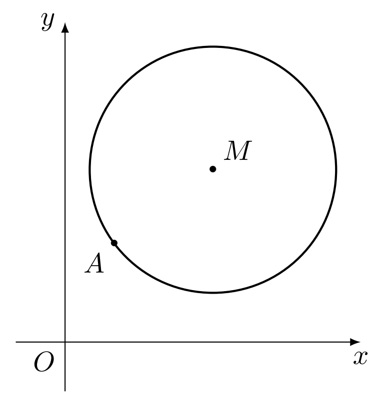
16. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别为 AB, BC 的中点, 点 F 在侧棱 B_1B 上, 且 $B_1D\perp A_1F$, $A_1C_1\perp A_1B_1$. 求证:
(1) 直线 $DE\,/\!/$ 平面 A_1C_1F;
(2) 平面 $B_1DE\perp$ 平面 A_1C_1F.



17. 现需要设计一个仓库, 它由上下两部分组成, 上部分的形状是正四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$, 下部分的形状是正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ (如图所示), 并要求正四棱柱的高 O_1O 是正四棱锥的高 PO_1 的 4 倍.
(1) 若 $AB=6$ m, $PO_1=2$ m, 则仓库的容积是多少?
(2) 若正四棱锥的侧棱长为 6 m, 当 PO_1 为多少时, 仓库的容积最大?



18. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知以 M 为圆心的圆 M: $x^2+y^2-12x-14y+60=0$ 及其上一点 $A(2,4)$.
(1) 设圆 N 与 x 轴相切, 与圆 M 外切, 且圆心 N 在直线 $x=6$ 上, 求圆 N 的标准方程;
(2) 设平行于 OA 的直线 l 与圆 M 相交于 B, C 两点, 且 $BC=OA$, 求直线 l 的方程;
(3) 设点 $T(t,0)$ 满足: 存在圆 M 上的两点 P 和 Q, 使得 $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$, 求实数 t 的取值范围.



19. 已知函数 $f(x)=a^x+b^x\ (a>0,\ b>0,\ a\neq 1,\ b\neq 1)$.

(1) 设 $a=2, b=\dfrac{1}{2}$.

① 求方程 $f(x)=2$ 的根;

② 若对于任意 $x\in\mathbf{R}$, 不等式 $f(2x)\geqslant mf(x)-6$ 恒成立, 求实数 m 的最大值;

(2) 若 $0<a<1$, $b>1$, 函数 $g(x)=f(x)-2$ 有且只有 1 个零点, 求 ab 的值.

20. 记 $U=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 100\}$. 对数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 和 U 的子集 T, 若 $T=\varnothing$, 定义 $S_T=0$; 若 $T=\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_k\}$, 定义 $S_T=a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_k}$. 例如: $T=\{1,\ 3,\ 66\}$ 时, $S_T=a_1+a_3+a_{66}$. 现设 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 是公比为 3 的等比数列, 且当 $T=\{2,\ 4\}$ 时, $S_T=30$.

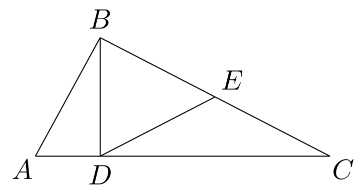
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 对任意正整数 k $(1\leqslant k\leqslant 100)$, 若 $T\subseteq\{1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$, 求证: $S_T<a_{k+1}$;

(3) 设 $C\subseteq U$, $D\subseteq U$, $S_C\geqslant S_D$, 求证: $S_C+S_{C\cap D}\geqslant 2S_D$.

21. 四选二.

【A】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, $BD\perp AC$, D 为垂足, E 是 BC 中点. 求证: $\angle EDC=\angle ABD$.



【B】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$, 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{AB}$.

【C】在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\end{cases}$ (t 为参数), 椭圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=2\sin\theta,\end{cases}$ (θ 为参数). 设直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 求线段 AB 的长.

【D】设 $a>0$, $|x-1|<\dfrac{a}{3}$, $|y-2|<\dfrac{a}{3}$, 求证: $|2x+y-4|<a$.

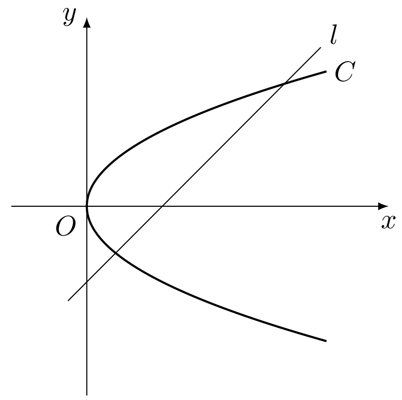
22. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l: $x-y-2=0$, 抛物线 C: $y^2=2px$ $(p>0)$.

(1) 若直线 l 过抛物线 C 的焦点, 求抛物线 C 的方程;

(2) 已知抛物线 C 上存在关于直线 l 对称的相异两点 P 和 Q.

① 求证: 线段 PQ 上的中点坐标为 $(2-p,-p)$;

② 求 p 的取值范围.



23. (1) 求 $7\mathrm{C}_6^3-4\mathrm{C}_7^4$ 的值;

(2) 设 m, $n\in\mathbf{N}^*$, $n\geqslant m$, 求证: $(m+1)\mathrm{C}_m^m+(m+2)\mathrm{C}_{m+1}^m+(m+3)\mathrm{C}_{m+2}^m+\cdots+n\mathrm{C}_{n-1}^m+(n+1)\mathrm{C}_n^m=(m+1)\mathrm{C}_{n+2}^{m+2}$.