2017 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 理)

一、选择题

1. $\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $1+2\mathrm{i}$ (B) $1-2\mathrm{i}$ (C) $2+\mathrm{i}$ (D) $2-\mathrm{i}$

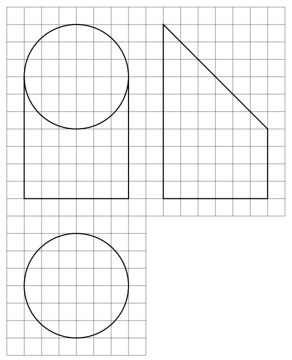
2. 设集合 $A=\{1,\ 2,\ 4\}$, $B=\{x\mid x^2-4x+m=0\}$. 若 $A\cap B=\{1\}$, 则 $B=$ ( )

(A) $\{1,\ -3\}$ (B) $\{1,\ 0\}$ (C) $\{1,\ 3\}$ (D) $\{1,\ 5\}$

3. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题:“远望巍巍塔七层, 红光点点倍加增, 共灯三百八十一, 请问尖头几盏灯?”意思是: 一座 7 层塔共挂了 381 盏灯, 且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍, 则塔的顶层共有灯 ( )

(A) 1 盏 (B) 3 盏 (C) 5 盏 (D) 9 盏

4. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得, 则该几何体的体积为 ( )



(A) 90π (B) 63π (C) 42π (D) 36π

5. 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0,\\ 2x-3y+3\geqslant 0,\\ y+3\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值是 ( )

(A) -15 (B) -9 (C) 1 (D) 9

6. 安排 3 名志愿者完成 4 项工作, 每人至少完成 1 项, 每项工作由 1 人完成, 则不同的安排方式共有 ( )

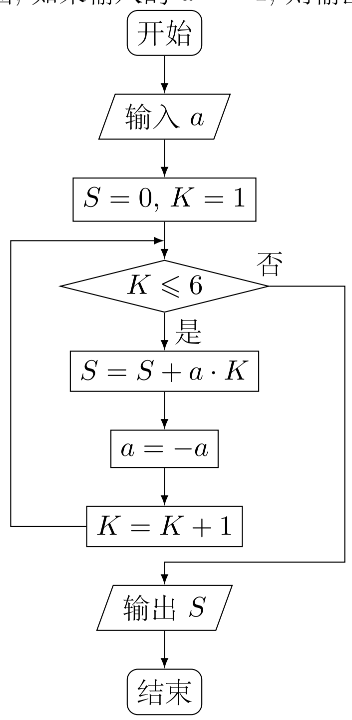
(A) 12 种 (B) 18 种 (C) 24 种 (D) 36 种

7. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩. 老师说: 你们四人中有 2 位优秀, 2 位良好, 我现在给甲看乙、丙的成绩, 给乙看丙的成绩, 给丁看甲的成绩. 看后甲对大家说: 我还是不知道我的成绩. 根据以上信息, 则 ( )

(A) 乙可以知道四人的成绩 (B) 丁可以知道四人的成绩

(C) 乙、丁可以知道对方的成绩 (D) 乙、丁可以知道自己的成绩

8. 执行如图的程序框图, 如果输入的 $a=-1$, 则输出的 $S=$ ( )



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

9. 若双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为 2, 则 C 的离心率为 ( )

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

10. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC=120^\circ$, $AB=2$, $BC=CC_1=1$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ (C) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11. 若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)\,\mathrm{e}^{x-1}$ 的极值点, 则 $f(x)$ 的极小值为 ( )

(A) -1 (B) $-2\mathrm{e}^{-3}$ (C) $5\mathrm{e}^{-3}$ (D) 1

12. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 的最小值是 ( )

(A) -2 (B) $-\dfrac{3}{2}$ (C) $-\dfrac{4}{3}$ (D) -1

二、填空题

13. 一批产品的二等品率为 0.02, 从这批产品中每次随机取一件, 有放回地抽取 100 次, X 表示抽到的二等品件数, 则 $DX=$______.

14. 函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{4}\ \left(x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值是______.

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $a_3=3$, $S_4=10$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}=$______.

16. 已知 F 是抛物线 C: $y^2=8x$ 的焦点, M 是 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴于点 N. 若 M 为 FN 的中点, 则 $|FN|=$______.

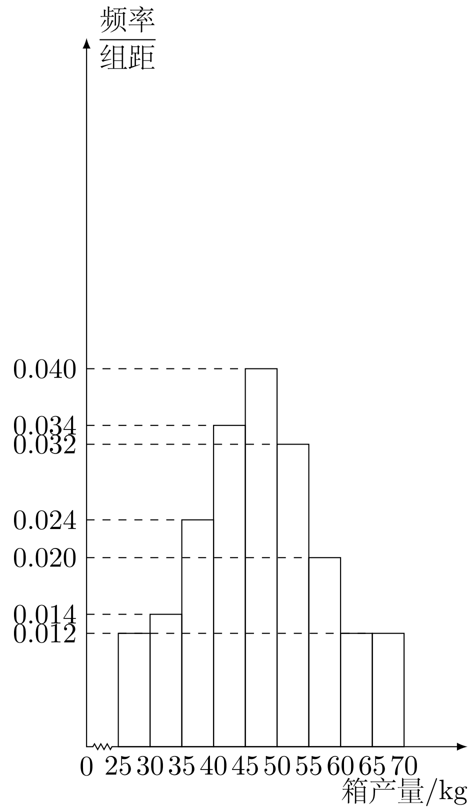
三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\dfrac{B}{2}$.

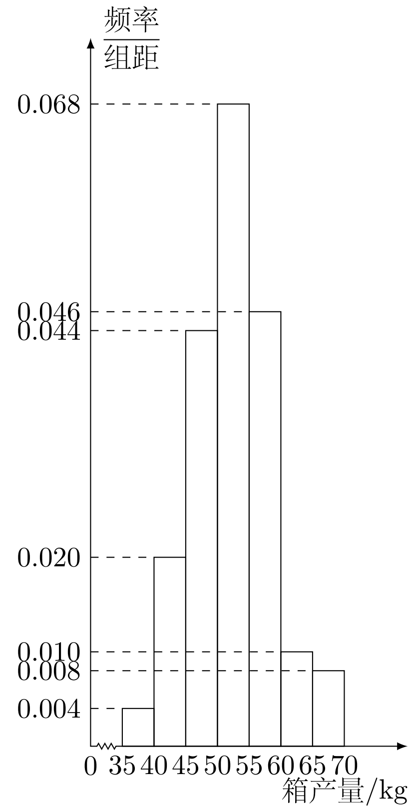
(1) 求 $\cos B$;

(2) 若 $a+c=6$, $\triangle ABC$ 面积为 2, 求 b.

18. 海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比, 收获时各随机抽取了 100 个网箱, 测量各箱水产品的产量 (单位: kg), 其频率分布直方图如图:



旧养殖法



新养殖法

(1) 设两种养殖方法的箱产量相互独立, 记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50 kg, 新养殖法的箱产量不低于 50 kg”, 估计 A 的概率;

(2) 填写下面列联表, 并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关;

	箱产量 <50 kg	箱产量 $\geqslant 50$ kg
旧养殖法		
新养殖法		

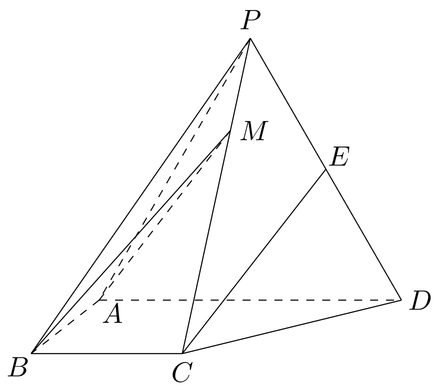
(3) 根据箱产量的频率分布直方图, 求新养殖法箱产量的中位数的估计值 (精确到 0.01).

附:

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
K	3.841	6.635	10.828

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

19. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, $AB=BC=\dfrac{1}{2}AD$, $\angle BAD=\angle ABC=90^{\circ}$, E 是 PD 的中点.
(1) 证明: 直线 $CE\,/\!/$ 平面 PAB;
(2) 点 M 在棱 PC 上, 且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45°, 求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值.



20. 设 O 为坐标原点, 动点 M 在椭圆 C: $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上, 过 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 N, 点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.
(1) 求点 P 的轨迹方程;
(2) 设点 Q 在直线 $x=-3$ 上, 且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$. 证明: 过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21. 已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$, 且 $f(x)\geqslant 0$.
(1) 求 a;
(2) 证明: $f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0, 且 $\mathrm{e}^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$.
(1) M 为曲线 C_1 上的动点, 点 P 在线段 OM 上, 且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$,, 求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程;
(2) 设点 A 的极坐标为 $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$, 点 B 在曲线 C_2 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. 已知 $a>0$, $b>0$, $a^3+b^3=2$, 证明:
(1) $(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$;
(2) $a+b\leqslant 2$.