

2017 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 理)

一、选择题

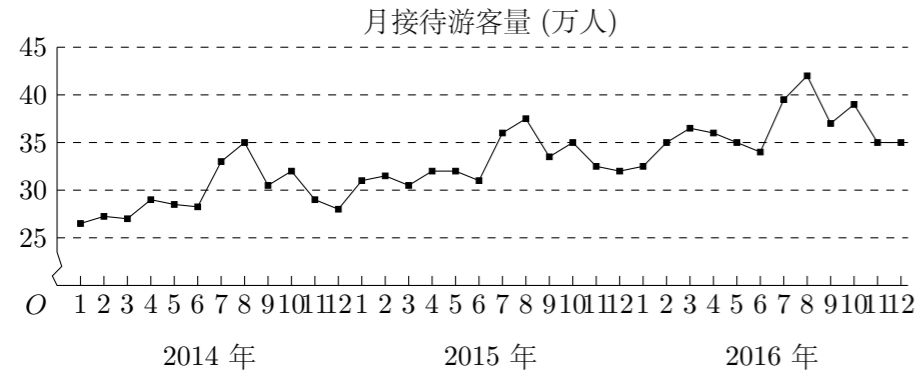
1. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) | y = x\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为 ()

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

2. 设复数 z 满足 $(1 + i)z = 2i$, 则 $|z| =$ ()

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

3. 某城市为了解游客人数的变化规律, 提高旅游服务质量, 收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量 (单位: 万人) 的数据, 绘制了下面的折线图.



根据该折线图, 下列结论错误的是 ()

- (A) 月接待游客量逐月增加
(B) 年接待游客量逐年增加
(C) 各年的月接待游客量高峰期大致在 7, 8 月
(D) 各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月, 波动性更小, 变化比较平稳

4. $(x + y)(2x - y)^5$ 的展开式中的 x^3y^3 系数为 ()

- (A) -80 (B) -40 (C) 40 (D) 80

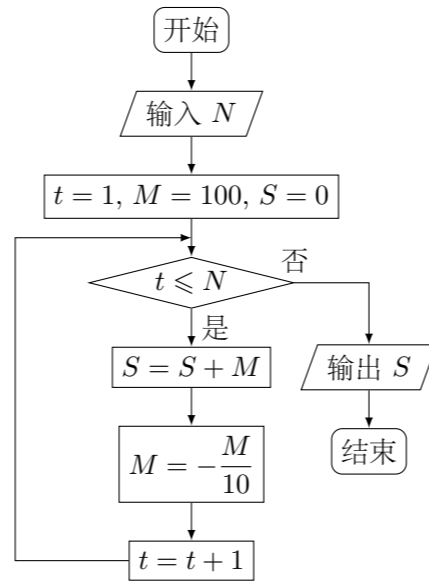
5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, 且与椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 有公共焦点, 则 C 的方程为 ()

- (A) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{10} = 1$ (B) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ (C) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ (D) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

6. 设函数 $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 则下列结论错误的是 ()

- (A) $f(x)$ 的一个周期为 -2π
(B) $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{8\pi}{3}$ 对称
(C) $f(x + \pi)$ 的一个零点为 $x = \frac{\pi}{6}$
(D) $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 单调递减

7. 执行如图的程序框图, 为使输出 S 的值小于 91, 则输入的正整数 N 的最小值为 ()



- (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

8. 已知圆柱的高为 1, 它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上, 则该圆柱的体积为 ()

- (A) π (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

9. 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差为 d , 若 a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则 $\{a_n\}$ 前 6 项的和为 ()

- (A) -24 (B) -3 (C) 3 (D) 8

10. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx - ay + 2ab = 0$ 相切, 则 C 的离心率为 ()

- (A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

11. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x+1})$ 有唯一零点, 则 $a =$ ()

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

12. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 1, AD = 2$, 动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若 $\vec{AP} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AD}$, 则 $\lambda + \mu$ 的最大值为 ()

- (A) 3 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ x + y - 2 \leq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x - 4y$ 的最小值为_____.

14. 设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 = -1, a_1 - a_3 = -3$, 则 $a_4 =$ _____.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & x > 0, \end{cases}$ 则满足 $f(x) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) > 1$ 的 x 的取值范围是_____.

16. a, b 为空间中两条互相垂直的直线, 等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 a, b 都垂直, 斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转, 有下列结论:

- ① 当直线 AB 与 a 成 60° 角时, AB 与 b 成 30° 角;
② 当直线 AB 与 a 成 60° 角时, AB 与 b 成 60° 角;
③ 直线 AB 与 a 所成角的最小值为 45° ;
④ 直线 AB 与 a 所成角的最大值为 60° ;

其中正确的是_____. (填写所有正确结论的编号)

三、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin A + \sqrt{3}\cos A = 0, a = 2\sqrt{7}, b = 2$.

- (1) 求 c ;
(2) 设 D 为 BC 边上一点, 且 $AD \perp AC$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

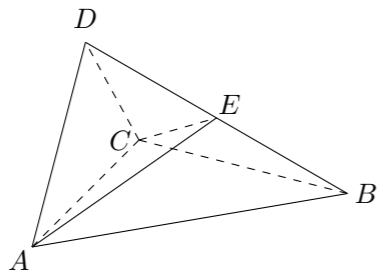
18. 某超市计划按月订购一种酸奶, 每天进货量相同, 进货成本每瓶 4 元, 售价每瓶 6 元, 未售出的酸奶降价处理, 以每瓶 2 元的价格当天全部处理完. 根据往年销售经验, 每天需求量与当天最高气温 (单位: $^\circ\text{C}$) 有关. 如果最高气温不低于 25, 需求量为 500 瓶; 如果最高气温位于区间 $[20, 25)$, 需求量为 300 瓶; 如果最高气温低于 20, 需求量为 200 瓶. 为了确定六月份的订购计划, 统计了前三年六月份各天的最高气温数据, 得下面的频数分布表:

最高气温	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)	[35, 40)
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率.

- (1) 求六月份这种酸奶一天的需求量 X (单位: 瓶) 的分布列;
(2) 设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y (单位: 元), 当六月份这种酸奶一天的进货量 n (单位: 瓶) 为多少时, Y 的数学期望达到最大值?

19. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $\triangle ABC$ 是正三角形, $\triangle ACD$ 是直角三角形, $\angle ABD = \angle CBD$, $AB = BD$.
- (1) 证明: 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ;
- (2) 过 AC 的平面交 BD 于点 E , 若平面 AEC 把四面体 $ABCD$ 分成体积相等的两部分, 求二面角 $D-AE-C$ 的余弦值.



20. 已知抛物线 $C: y^2 = 2x$, 过点 $(2, 0)$ 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.
- (1) 证明: 坐标原点 O 在圆 M 上;
- (2) 设圆 M 过点 $P(4, -2)$, 求直线 l 与圆 M 的方程.

21. 已知函数 $f(x) = x - 1 - a \ln x$.
- (1) 若 $f(x) \geq 0$, 求 a 的值;
- (2) 设 m 为整数, 且对于任意正整数 n , $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < m$, 求 m 的最小值.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = kt, \end{cases}$ (t 为参数), 直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2 + m, \\ y = \frac{m}{k}, \end{cases}$ (m 为参数). 设 l_1 与 l_2 的交点为 P , 当 k 变化时, P 的轨迹为曲线 C .
- (1) 写出 C 的普通方程;
- (2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 设 $l_3: \rho(\cos \theta + \sin \theta) - \sqrt{2} = 0$, M 为 l_3 与 C 的交点, 求 M 的极径.

23. 已知函数 $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$.
- (1) 求不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集;
- (2) 若不等式 $f(x) \geq x^2 - x + m$ 的解集非空, 求 m 的取值范围.