

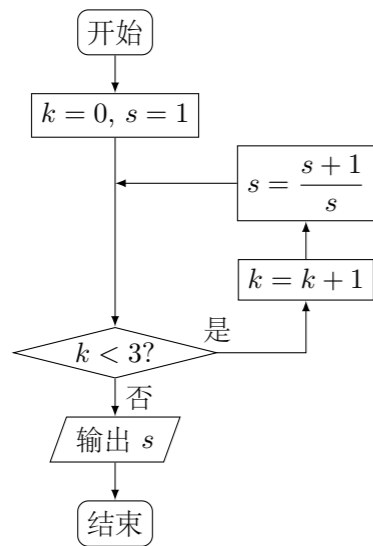
2017 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

一、选择题

1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$, 则 $\complement_U A =$ ()
 (A) $(-2, 2)$ (B) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
 (C) $[-2, 2]$ (D) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

2. 若复数 $(1-i)(a+i)$ 在复平面内对应的点在第二象限, 则实数 a 的取值范围是 ()
 (A) $(-\infty, 1)$ (B) $(-\infty, -1)$ (C) $(1, +\infty)$ (D) $(-1, +\infty)$

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为 ()



- (A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{8}{5}$

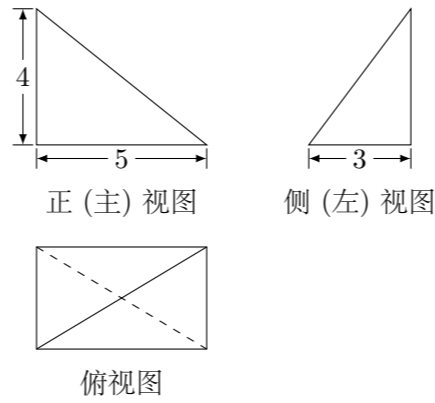
4. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 3, \\ x + y \geq 2, \\ y \leq x, \end{cases}$ 则 $x + 2y$ 的最大值为 ()

- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 9

5. 已知函数 $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$, 则 $f(x)$ ()

- (A) 是偶函数, 且在 \mathbf{R} 上是增函数
 (B) 是奇函数, 且在 \mathbf{R} 上是增函数
 (C) 是偶函数, 且在 \mathbf{R} 上是减函数
 (D) 是奇函数, 且在 \mathbf{R} 上是减函数

6. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积为 ()



- (A) 60 (B) 30 (C) 20 (D) 10

7. 设 \mathbf{m}, \mathbf{n} 为非零向量, 则“存在负数 λ , 使得 $\mathbf{m} = \lambda\mathbf{n}$ ”是“ $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} < 0$ ”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 根据有关资料, 围棋状态空间复杂度的上限 M 约为 3^{361} , 而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为 10^{80} , 则下列各数中与 $\frac{M}{N}$ 最接近的是 () (参考数据: $\lg 3 \approx 0.48$)
 (A) 10^{33} (B) 10^{53} (C) 10^{73} (D) 10^{93}

二、填空题

9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 y 轴对称, 若 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\sin \beta =$ _____.

10. 若双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则实数 $m =$ _____.

11. 已知 $x \geq 0, y \geq 0$, 且 $x + y = 1$, 则 $x^2 + y^2$ 的取值范围是 _____.

12. 已知点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 点 A 的坐标为 $(-2, 0)$, O 为原点, 则 $\vec{AO} \cdot \vec{AP}$ 的最大值为 _____.

13. 能够说明“设 a, b, c 是任意实数. 若 $a > b > c$, 则 $a + b > c$ ”是假命题的一组整数 a, b, c 的值依次为 _____.

14. 某学习小组由学生和教师组成, 人员构成同时满足以下三个条件:

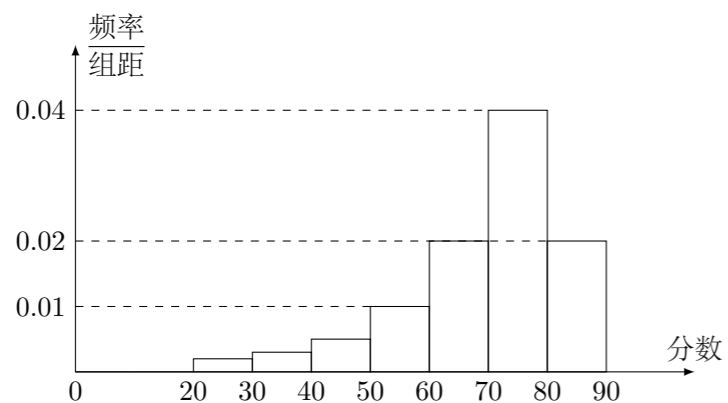
- ① 男学生人数多于女学生人数;
 - ② 女学生人数多于教师人数;
 - ③ 教师人数的两倍多于男学生人数.
- (1) 若教师人数为 4, 则女学生人数的最大值为 _____;
- (2) 该小组人数的最小值为 _____.

三、解答题

15. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1 = 1, a_2 + a_4 = 10, b_2 b_4 = a_5$.
 (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 求和: $b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{2n-1}$.

16. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin x \cos x$.
 (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
 (2) 求证: 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $f(x) \geq -\frac{1}{2}$.

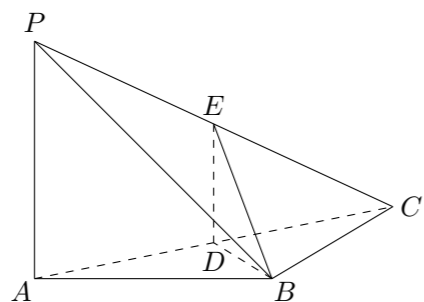
17. 某大学艺术专业 400 名学生参加某次测评, 根据男女学生人数比例, 使用分层抽样的方法从中随机抽取了 100 名学生, 记录他们的分数, 将数据分成 7 组: $[20, 30)$, $[30, 40)$, \dots , $[80, 90]$, 并整理得到如下频率分布直方图:



- 从总体的 400 名学生中随机抽取一人, 估计其分数小于 70 的概率;
- 已知样本中分数小于 40 的学生有 5 人, 试估计总体中分数在区间 $[40, 50)$ 内的人数;
- 已知样本中有一半男生的分数不小于 70, 且样本中分数不小于 70 的男女生人数相等. 试估计总体中男生和女生人数的比例.

18. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp AB$, $PA \perp BC$, $AB \perp BC$, $PA = AB = BC = 2$, D 为线段 AC 的中点, E 为线段 PC 上一点.

- 求证: $PA \perp BD$;
- 求证: 平面 $BDE \perp$ 平面 PAC ;
- 当 $PA \parallel$ 平面 BDE 时, 求三棱锥 $E-BCD$ 的体积.



19. 已知椭圆 C 的两个顶点分别为 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, 焦点在 x 轴上, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- 求椭圆 C 的方程;
- 点 D 为 x 轴上一点, 过 D 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于不同的两点 M , N , 过 D 作 AM 的垂线交 BN 于点 E . 求证: $\triangle BDE$ 与 $\triangle BDN$ 的面积之比为 4:5.

20. 已知函数 $f(x) = e^x \cos x - x$.

- 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;
- 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.