2017 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

1. 若集合 $A=\{x\mid -2<x<1\}$, $B=\{x\mid x<-1$ 或 $x>3\}$, 则 $A\cap B=$(　)

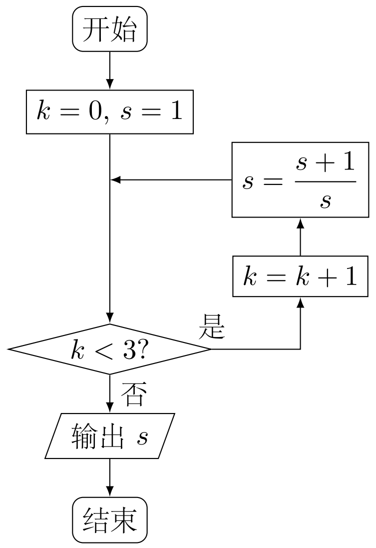
(A) $\{x\mid -2<x<-1\}$　(B) $\{x\mid -2<x<3\}$

(C) $\{x\mid -1<x<1\}$　(D) $\{x\mid 1<x<3\}$

2. 若复数 $(1-\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点在第二象限, 则实数 a 的取值范围是　(　)

(A) $(-\infty,1)$　(B) $(-\infty,-1)$　(C) $(1,+\infty)$　(D) $(-1,+\infty)$

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为　(　)



(A) 2　(B) $\dfrac{3}{2}$　(C) $\dfrac{5}{3}$　(D) $\dfrac{8}{5}$

4. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x\leqslant 3,\\ x+y\geqslant 2,\\ y\leqslant x,\end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值为　(　)

(A) 1　(B) 3　(C) 5　(D) 9

5. 已知函数 $f(x)=3^x-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, 则 $f(x)$　(　)

(A) 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数　(B) 是偶函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

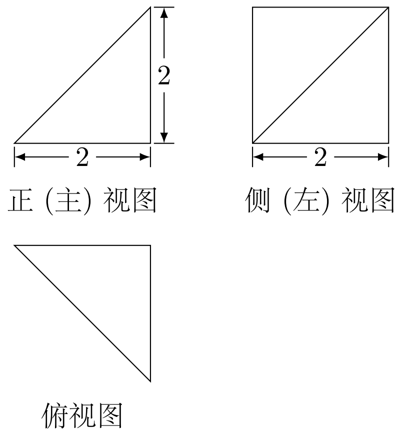
(C) 是奇函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数　(D) 是偶函数, 且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

6. 设 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ 为非零向量, 则"存在负数 λ, 使得 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}$"是"$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}<0$"的 (　)

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 某四棱锥的三视图如图所示, 则该四棱锥的最长棱的长度为　(　)



(A) $3\sqrt{2}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) $2\sqrt{2}$　(D) 2

8. 根据有关资料, 围棋状态空间复杂度的上限 M 约为 3^{361}, 而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为 10^{80}, 则下列各数中与 $\dfrac{M}{N}$ 最接近的是　(　)
(*参考数据*: $\lg 3\approx 0.48$)

(A) 10^{33}　(B) 10^{53}　(C) 10^{73}　(D) 10^{93}

二、填空题

9. 若双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{m}=1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则实数 $m=$______.

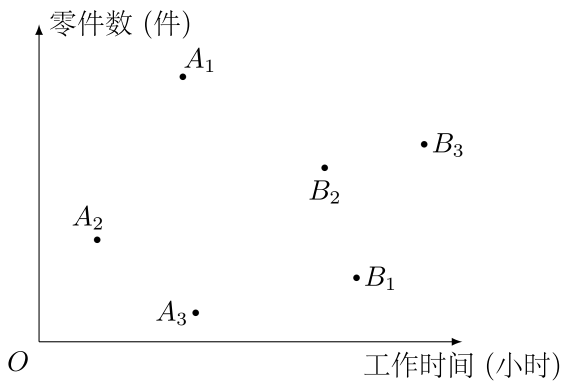
10. 若等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=-1$, $a_4=b_4=8$, 则 $\dfrac{a_2}{b_2}=$______.

11. 在极坐标系中, 点 A 在圆 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$ 上, 点 P 的坐标为 $(1,0)$, 则 $|AP|$ 的最小值为______.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 y 轴对称, 若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, 则 $\cos(\alpha-\beta)=$______.

13. 能够说明"设 a, b, c 是任意实数. 若 $a>b>c$, 则 $a+b>c$"是假命题的一组整数 a, b, c 的值依次为______.

14. 三名工人加工同一种零件, 他们在一天中的工作情况如图所示, 其中 A_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人上午的工作时间和加工的零件数, 点 B_i 的横、纵坐标分别为第 i 名工人下午的工作时间和加工的零件数, $i=1, 2, 3$.

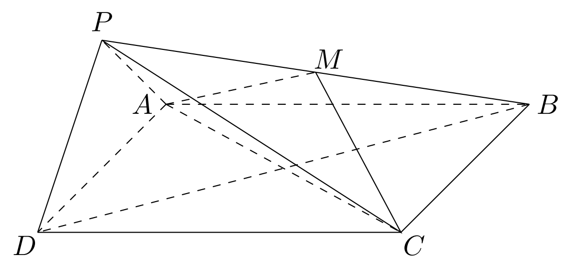


(1) 记 Q_i 为第 i 名工人在这一天中加工的零件总数, 则 Q_1, Q_2, Q_3 中最大的是______;
(2) 记 p_i 为第 i 名工人在这一天中平均每小时加工的零件数, 则 p_1, p_2, p_3 中最大的是______.

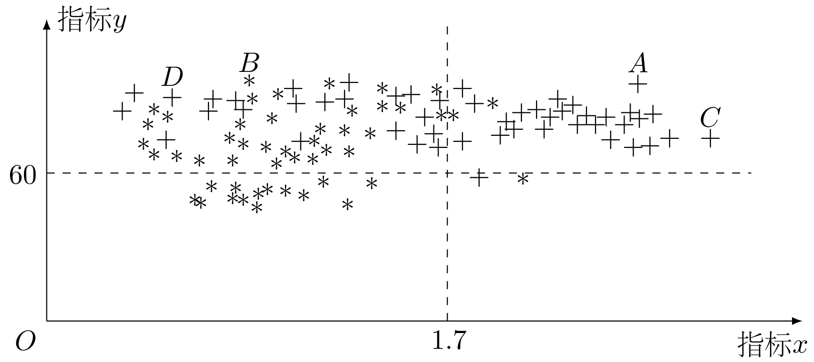
三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=60^\circ$, $c=\dfrac{3}{7}a$.
(1) 求 $\sin C$ 的值;
(2) 若 $a=7$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, 点 M 在线段 PB 上, $PD\parallel$ 平面 MAC, $PA=PD=\sqrt{6}$, $AB=4$.
(1) 求证: M 为 PB 的中点;
(2) 求二面角 $B-PD-A$ 的大小;
(3) 求直线 MC 与平面 BDP 所成角的正弦值.



17. 为了研究一种新药的疗效, 选 100 名患者随机分成两组, 每组各 50 名, 一组服药, 另一组不服药. 一段时间后, 记录了两组患者的生理指标 x 和 y 的数据, 并制成如图, 其中"*"表示服药者, "+"表示未服药者.



(1) 从服药的 50 名患者中随机选出一人, 求此人指标 y 的值小于 60 的概率;
(2) 从图中 A, B, C, D 四人中随机选出两人, 记 ξ 为选出的两人中指标 x 的值大于 1.7 的人数, 求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$;
(3) 试判断这 100 名患者中服药者指标 y 数据的方差与未服药者指标 y 数据的方差的大小. (只需写出结论)

18. 已知抛物线 C: $y^2=2px$ 过点 $P(1,1)$. 过点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 作直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 M, N, 过点 M 作 x 轴的垂线分别与直线 OP, ON 交于点 A, B, 其中 O 为原点.
(1) 求抛物线 C 的方程, 并求其焦点坐标和准线方程;
(2) 求证: A 为线段 BM 的中点.

19. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x-x$.
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;
(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

20. 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个等差数列, 记 $c_n=\max\{b_1-a_1n, b_2-a_2n, \cdots, b_n-a_nn\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$, 其中 $\max\{x_1, x_2, \cdots, x_s\}$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 这 s 个数中最大的数.
(1) 若 $a_n=n$, $b_n=2n-1$, 求 c_1, c_2, c_3 的值, 并证明 $\{c_n\}$ 是等差数列;
(2) 证明: 或者对任意正数 M, 存在正整数 m, 当 $n\geqslant m$ 时, $\dfrac{c_n}{n}>M$; 或者存在正整数 m, 使得 $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \cdots$ 是等差数列.