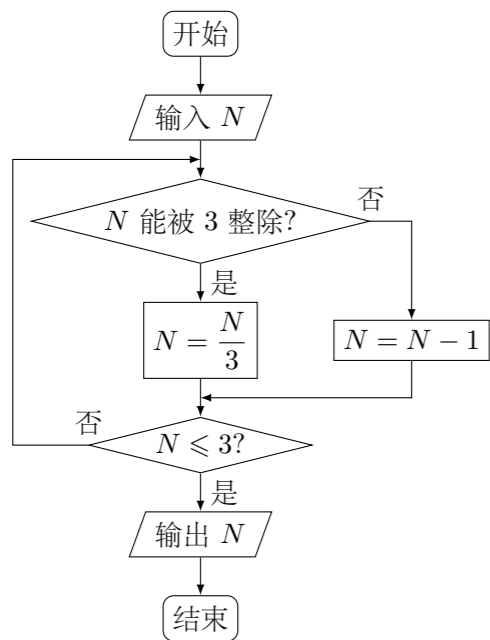


2017 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

一、选择题

1. 设集合 $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $(A \cup B) \cap C =$ ()
 (A) $\{2\}$ (B) $\{1, 2, 4\}$ (C) $\{1, 2, 4, 6\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4, 6\}$
2. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $2 - x \geq 0$ ”是“ $|x - 1| \leq 1$ ”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 有 5 支彩笔 (除颜色外无差别), 颜色分别为红、黄、蓝、绿、紫. 从这 5 支彩笔中任取 2 支不同颜色的彩笔, 则取出的 2 支彩笔中含有红色彩笔的概率为 ()
 (A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{5}$
4. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 若输入 N 的值为 19, 则输出 N 的值为 ()



- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , 点 A 在双曲线的渐近线上, $\triangle OAF$ 是边长为 2 的等边三角形 (O 为原点), 则双曲线方程为 ()
 (A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ (B) $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ (C) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ (D) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$
6. 已知奇函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数. 若 $a = -f\left(\log_2 \frac{1}{5}\right)$, $b = f(\log_2 4.1)$, $c = f(2^{0.8})$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
 (A) $a < b < c$ (B) $b < a < c$ (C) $c < b < a$ (D) $c < a < b$

7. 设函数 $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $\omega > 0, |\varphi| < \pi$. 若 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2, f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 则 ()
 (A) $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{12}$ (B) $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{12}$
 (C) $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{24}$ (D) $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = \frac{7\pi}{24}$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x| + 2, & x < 1, \\ x + \frac{2}{x}, & x \geq 1, \end{cases}$ 设 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq \left|\frac{x}{2} + a\right|$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 则 a 的取值范围是 ()
 (A) $[-2, 2]$ (B) $[-2\sqrt{3}, 2]$ (C) $[-2, 2\sqrt{3}]$ (D) $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$

二、填空题

9. 已知 $a \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位, 若 $\frac{a-i}{2+i}$ 为实数, 则 a 的值为_____.
10. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 设函数 $f(x) = ax - \ln x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 l , 则 l 在 y 轴上的截距为_____.
11. 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上, 若这个正方体的表面积为 18, 则这个球的体积为_____.
12. 设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l . 已知点 C 在 l 上, 以 C 为圆心的圆与 y 轴的正半轴相切于点 A . 若 $\angle FAC = 120^\circ$, 则圆的方程为_____.
13. 若 $a, b \in \mathbf{R}, ab > 0$, 则 $\frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab}$ 的最小值为_____.
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ, AB = 3, AC = 2$. 若 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ($\lambda \in \mathbf{R}$), 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = -4$, 则 λ 的值为_____.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a \sin A = 4b \sin B, ac = \sqrt{5}(a^2 - b^2 - c^2)$.
 (1) 求 $\cos A$ 的值;
 (2) 求 $\sin(2B - A)$ 的值.

16. 电视台播放甲、乙两套连续剧, 每次播放连续剧时, 需要播放广告. 已知每次播放甲、乙两套连续剧时, 连续剧播放时长、广告播放时长、收视人次如下表所示:

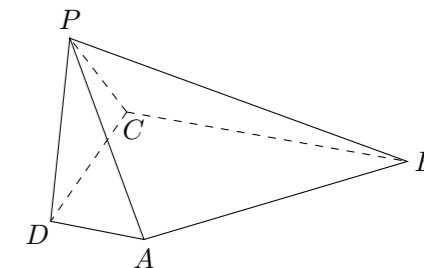
	连续剧播放时长 (分钟)	广告播放时长 (分钟)	收视人次 (万)
甲	70	5	60
乙	60	5	25

已知电视台每周安排的甲、乙连续剧的总播放时间不多于 600 分钟, 广告的总播放时间不少于 30 分钟, 且甲连续剧播放的次数不多于乙连续剧播放次数的 2 倍. 分别用 x, y 表示每周计划播出的甲、乙两套连续剧的次数.

- (1) 用 x, y 列出满足题目条件的数学关系式, 并画出相应的平面区域;
- (2) 问电视台每周播出甲、乙两套连续剧各多少次, 才能使总收视人次最多?

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \perp$ 平面 $PDC, AD \parallel BC, PD \perp PB, AD = 1, BC = 3, CD = 4, PD = 2$.

- (1) 求异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值;
- (2) 求证: $PD \perp$ 平面 PBC ;
- (3) 求直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值.



18. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$), $\{b_n\}$ 是首项为 2 的等比数列, 且公比大于 0, $b_2 + b_3 = 12$, $b_3 = a_4 - 2a_1$, $S_{11} = 11b_4$.
- (1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
 - (2) 求数列 $\{a_{2n}b_n\}$ 的前 n 项和 ($n \in \mathbf{N}^*$).
19. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, $|a| \leq 1$. 已知函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3a(a-4)x + b$, $g(x) = e^x f(x)$.
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间;
 - (2) 已知函数 $y = g(x)$ 和 $y = e^x$ 的图象在公共点 (x_0, y_0) 处有相同的切线.
 - ① 求证: $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数等于 0;
 - ② 若关于 x 的不等式 $g(x) \leq e^x$ 在区间 $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ 上恒成立, 求 b 的取值范围.
20. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 $F(-c, 0)$, 右顶点为 A , 点 E 的坐标为 $(0, c)$, $\triangle EFA$ 的面积为 $\frac{b^2}{2}$.
- (1) 求椭圆的离心率;
 - (2) 设点 Q 在线段 AE 上, $|FQ| = \frac{3}{2}c$, 延长线段 FQ 与椭圆交于点 P , 点 M, N 在 x 轴上, $PM \parallel QN$, 且直线 PM 与直线 QN 间的距离为 c , 四边形 $PQNM$ 的面积为 $3c$.
 - ① 求直线 FP 的斜率;
 - ② 求椭圆的方程.