

## 2017 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

### 一、选择题

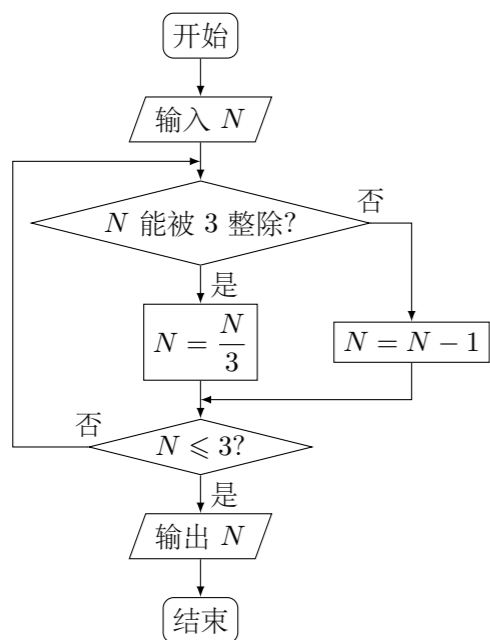
1. 设集合  $A = \{1, 2, 4, 6\}$ ,  $B = \{2, 4\}$ ,  $C = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$ , 则  $(A \cup B) \cap C =$  ( )

- (A)  $\{2\}$  (B)  $\{1, 2, 4\}$   
(C)  $\{1, 2, 4, 5\}$  (D)  $\{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$

2. 设变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} 2x + y \geq 0, \\ x + 2y - 2 \geq 0, \\ x \leq 0, \\ y \leq 3, \end{cases}$  则目标函数  $z = x + y$  的最

- 大值为 ( )  
(A)  $\frac{2}{3}$  (B) 1 (C)  $\frac{3}{2}$  (D) 3

3. 阅读程序框图, 运行相应的程序, 若输入  $N$  的值为 24, 则输出  $N$  的值为 ( )



- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

4. 设  $\theta \in \mathbf{R}$ , 则  $|\theta - \frac{\pi}{12}| < \frac{\pi}{12}$  是  $\sin \theta < \frac{1}{2}$  的 ( )

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左焦点为  $F$ , 离心率为  $\sqrt{2}$ . 若经过  $F$  和  $P(0, 4)$  两点的直线平行于双曲线的一条渐近线, 则双曲线的方程为 ( )

- (A)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$  (B)  $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$  (C)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$  (D)  $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

6. 已知奇函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数,  $g(x) = xf(x)$ . 若  $a = g(-\log_2 5.1)$ ,  $b = g(2^{0.8})$ ,  $c = g(3)$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- (A)  $a < b < c$  (B)  $c < b < a$  (C)  $b < a < c$  (D)  $b < c < a$

7. 设函数  $f(x) = 2 \sin(\omega x + \varphi)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 其中  $\omega > 0, |\varphi| < \pi$ . 若  $f(\frac{5\pi}{8}) = 2, f(\frac{11\pi}{8}) = 0$ , 且  $f(x)$  的最小正周期大于  $2\pi$ , 则 ( )

- (A)  $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{12}$  (B)  $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{12}$   
(C)  $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{24}$  (D)  $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = \frac{7\pi}{24}$

8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \leq 1, \\ x + \frac{2}{x}, & x > 1, \end{cases}$  设  $a \in \mathbf{R}$ , 若关于  $x$  的不等式

$f(x) \geq |\frac{x}{2} + a|$  在  $\mathbf{R}$  上恒成立, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- (A)  $[-\frac{47}{16}, 2]$  (B)  $[-\frac{47}{16}, \frac{39}{16}]$  (C)  $[-2\sqrt{3}, 2]$  (D)  $[-2\sqrt{3}, \frac{39}{16}]$

### 二、填空题

9. 已知  $a \in \mathbf{R}$ ,  $i$  为虚数单位, 若  $\frac{a-i}{2+i}$  为实数, 则  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

10. 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上, 若这个正方体的表面积为 18, 则这个球的体积为\_\_\_\_\_.

11. 在极坐标系中, 直线  $4\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) + 1 = 0$  与圆  $\rho = 2 \sin \theta$  的公共点的个数为\_\_\_\_\_.

12. 若  $a, b \in \mathbf{R}, ab > 0$ , 则  $\frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

13. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 60^\circ, AB = 3, AC = 2$ . 若  $\vec{BD} = 2\vec{DC}, \vec{AE} = \lambda \vec{AC} - \vec{AB}$  ( $\lambda \in \mathbf{R}$ ), 且  $\vec{AD} \cdot \vec{AE} = -4$ , 则  $\lambda$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 用数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 组成没有重复数字, 且至多有一个数字是偶数的四位数, 这样的四位数一共有\_\_\_\_\_个. (用数字作答)

### 三、解答题

15. 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 已知  $a > b, a = 5, c = 6, \sin B = \frac{3}{5}$ .

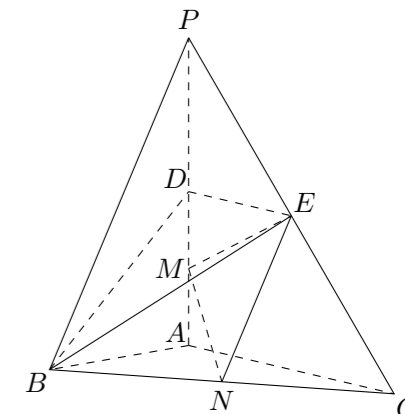
- (1) 求  $b$  和  $\sin A$  的值;  
(2) 求  $\sin(2A + \frac{\pi}{4})$  的值.

16. 从甲地到乙地要经过 3 个十字路口, 设各路口信号灯工作相互独立, 且在各路口遇到红灯的概率分别为  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ .

- (1) 设  $X$  表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数, 求随机变量  $X$  的分布列和数学期望;  
(2) 若有 2 辆车独立地从甲地到乙地, 求这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率.

17. 如图, 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA \perp$  底面  $ABC, \angle BAC = 90^\circ$ . 点  $D, E, N$  分别为棱  $PA, PC, BC$  的中点,  $M$  是线段  $AD$  的中点,  $PA = AC = 4, AB = 2$ .

- (1) 求证:  $MN \parallel$  平面  $BDE$ ;  
(2) 求二面角  $C-EM-N$  的正弦值;  
(3) 已知点  $H$  在棱  $PA$  上, 且直线  $NH$  与直线  $BE$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{7}}{21}$ , 求线段  $AH$  的长.



18. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列, 前  $n$  项和为  $S_n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ),  $\{b_n\}$  是首项为 2 的等比数列, 且公比大于 0,  $b_2 + b_3 = 12$ ,  $b_3 = a_4 - 2a_1$ ,  $S_{11} = 11b_4$ .
- (1) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;
- (2) 求数列  $\{a_{2n}b_{2n-1}\}$  的前  $n$  项和 ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

19. 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左焦点为  $F$ , 右顶点为  $A$ , 离心率为  $\frac{1}{2}$ . 已知  $A$  是抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点,  $F$  到抛物线的准线  $l$  的距离为  $\frac{1}{2}$ .
- (1) 求椭圆的方程和抛物线的方程;
- (2) 设  $l$  上两点  $P, Q$  关于  $x$  轴对称, 直线  $AP$  与椭圆相交于点  $B$  ( $B$  异于  $A$ ), 直线  $BQ$  与  $x$  轴相交于点  $D$ . 若  $\triangle APD$  的面积为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ , 求直线  $AP$  的方程.

20. 设  $a \in \mathbf{Z}$ , 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + a$  在区间  $(1, 2)$  内有一个零点  $x_0$ ,  $g(x)$  为  $f(x)$  的导函数.
- (1) 求  $g(x)$  的单调区间;
- (2) 设  $m \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$ , 函数  $h(x) = g(x)(m - x_0) - f(m)$ , 求证:  $h(m)h(x_0) < 0$ ;
- (3) 求证: 存在大于 0 的常数  $A$ , 使得对于任意的正整数  $p, q$ , 且  $\frac{p}{q} \in [1, x_0) \cup (x_0, 2]$ , 满足  $\left| \frac{p}{q} - x_0 \right| \geq \frac{1}{Aq^4}$ .