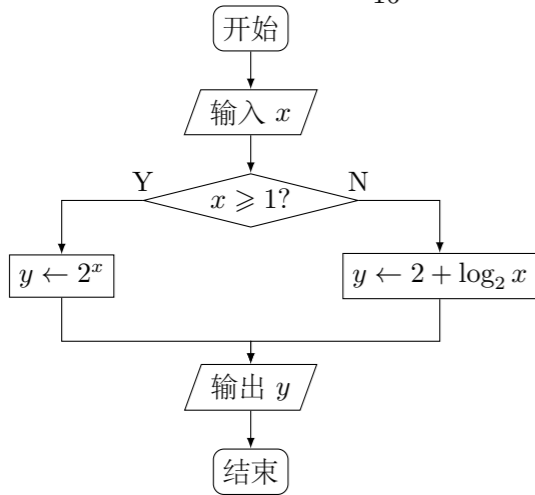


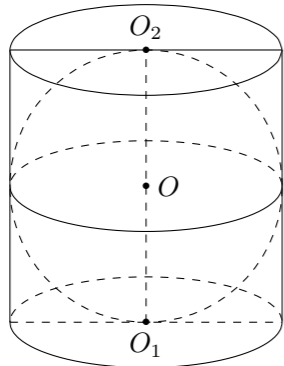
## 2017 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

### 一、填空题

1. 已知集合  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{a, a^2 + 3\}$ . 若  $A \cap B = \{1\}$ , 则实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.
2. 已知复数  $z = (1 + i)(1 + 2i)$ , 其中  $i$  是虚数单位, 则  $z$  的模是\_\_\_\_\_.
3. 某工厂生产甲、乙、丙、丁四种不同型号的产品, 产量分别为 200, 400, 300, 100 件. 为检验产品的质量, 现用分层抽样的方法从以上所有的产品中抽取 60 件进行检验, 则应从丙种型号的产品中抽取\_\_\_\_\_件.
4. 如图是一个算法流程图: 若输入  $x$  的值为  $\frac{1}{16}$ , 则输出  $y$  的值是\_\_\_\_\_.



5. 若  $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{6}$ , 则  $\tan \alpha =$ \_\_\_\_\_.
6. 如图, 在圆柱  $O_1O_2$  内有一个球  $O$ , 该球与圆柱的上、下底面及母线均相切, 记圆柱  $O_1O_2$  的体积为  $V_1$ , 球  $O$  的体积为  $V_2$ , 则  $\frac{V_1}{V_2}$  的值是\_\_\_\_\_.



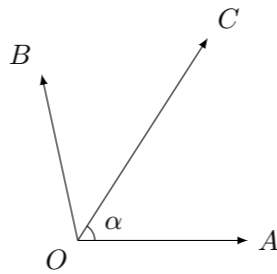
7. 记函数  $f(x) = \sqrt{6 + x - x^2}$  定义域为  $D$ . 在区间  $[-4, 5]$  上随机取一个数  $x$ , 则  $x \in D$  的概率是\_\_\_\_\_.
8. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 双曲线  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$  的右准线与它的两条渐近线分别交于点  $P, Q$ , 其焦点是  $F_1, F_2$ , 则四边形  $F_1PF_2Q$  的面积是\_\_\_\_\_.

9. 等比数列  $\{a_n\}$  的各项均为实数, 其前  $n$  项为  $S_n$ , 已知  $S_3 = \frac{7}{4}$ ,  $S_6 = \frac{63}{4}$ , 则  $a_8 =$ \_\_\_\_\_.

10. 某公司一年购买某种货物 600 吨, 每次购买  $x$  吨, 运费为 6 万元/次, 一年的总存储费用为  $4x$  万元. 要使一年的总运费与总存储费用之和最小, 则  $x$  的值是\_\_\_\_\_.

11. 已知函数  $f(x) = x^3 - 2x + e^x - \frac{1}{e^x}$ , 其中  $e$  是自然对数的底数. 若  $f(a - 1) + f(2a^2) \leq 0$ . 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

12. 如图, 在同一个平面内, 向量  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  的模分别为 1, 1,  $\sqrt{2}$ ,  $\vec{OA}$  与  $\vec{OC}$  的夹角为  $\alpha$ , 且  $\tan \alpha = 7$ ,  $\vec{OB}$  与  $\vec{OC}$  的夹角为  $45^\circ$ . 若  $\vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$  ( $m, n \in \mathbf{R}$ ), 则  $m + n =$ \_\_\_\_\_.



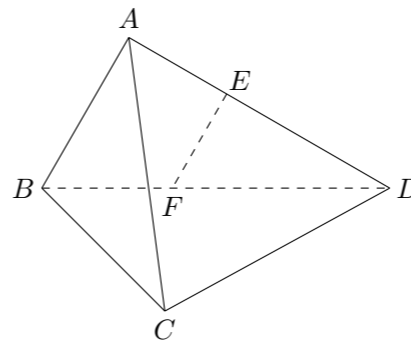
13. 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $A(-12, 0)$ ,  $B(0, 6)$ , 点  $P$  在圆  $O: x^2 + y^2 = 50$  上. 若  $\vec{PA} \cdot \vec{PB} \leq 20$ , 则点  $P$  的横坐标的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上且周期为 1 的函数, 在区间  $[0, 1)$  上,  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in D, \\ x, & x \notin D, \end{cases}$  其中集合  $D = \left\{x \mid x = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbf{N}\right\}$ , 则方程  $f(x) - \lg x = 0$  的解的个数是\_\_\_\_\_.

### 二、解答题

15. 如图, 在三棱锥  $A-BCD$  中,  $AB \perp AD$ ,  $BC \perp BD$ , 平面  $ABD \perp$  平面  $BCD$ , 点  $E, F$  ( $E$  与  $A, D$  不重合) 分别在棱  $AD, BD$  上, 且  $EF \perp AD$ . 求证:

- (1)  $EF \parallel$  平面  $ABC$ ;
- (2)  $AD \perp AC$ .

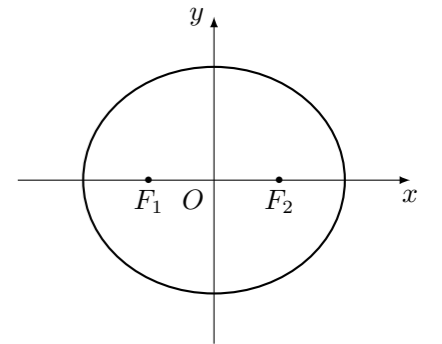


16. 已知向量  $\mathbf{a} = (\cos x, \sin x)$ ,  $\mathbf{b} = (3, -\sqrt{3})$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

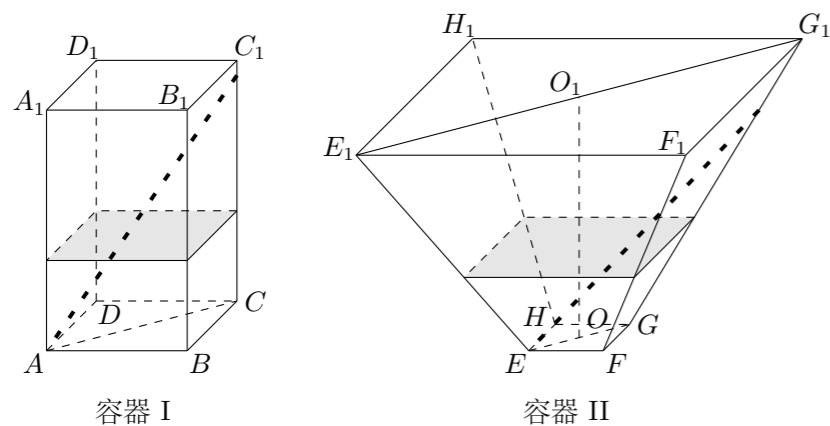
- (1) 若  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ , 求  $x$  的值;
- (2) 记  $f(x) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , 求  $f(x)$  的最大值和最小值以及对应的  $x$  的值.

17. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 离心率为  $\frac{1}{2}$ , 两准线之间的距离为 8. 点  $P$  在椭圆  $E$  上, 且位于第一象限, 过点  $F_1$  作直线  $PF_1$  的垂线  $l_1$ , 过点  $F_2$  作直线  $PF_2$  的垂线  $l_2$ .

- (1) 求椭圆  $E$  的标准方程;
- (2) 若直线  $l_1, l_2$  的交点  $Q$  在椭圆  $E$  上, 求点  $P$  的坐标.



18. 如图, 水平放置的正四棱柱形玻璃容器 I 和正四棱台形玻璃容器 II 的高均为 32 cm, 容器 I 的底面对角线  $AC$  的长为  $10\sqrt{7}$  cm, 容器 II 的两底面对角线  $EG, E_1G_1$  的长分别为 14 cm 和 62 cm. 分别在容器 I 和容器 II 中注入水, 水深均为 12 cm. 现有一根玻璃棒  $l$ , 其长度为 40 cm. (容器厚度, 玻璃棒粗细均忽略不计)
- (1) 将  $l$  放在容器 I 中,  $l$  的一端置于点  $A$  处, 另一端置于侧棱  $CC_1$  上, 求  $l$  没入水中部分的长度;
- (2) 将  $l$  放在容器 II 中,  $l$  的一端置于点  $E$  处, 另一端置于侧棱  $GG_1$  上, 求  $l$  没入水中部分的长度.

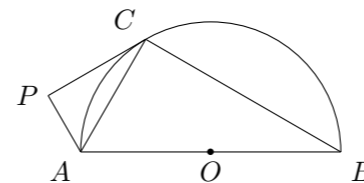


19. 对于给定的正整数  $k$ , 若数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_{n-k} + a_{n-k+1} + \dots + a_{n-1} + a_{n+1} + \dots + a_{n+k-1} + a_{n+k} = 2ka_n$  对任意正整数  $n$  ( $n > k$ ) 总成立, 则称数列  $\{a_n\}$  是“ $P(k)$  数列”.
- (1) 证明: 等差数列  $\{a_n\}$  是“ $P(3)$  数列”;
- (2) 若数列  $\{a_n\}$  既是“ $P(2)$  数列”, 又是“ $P(3)$  数列”, 证明:  $\{a_n\}$  是等差数列.

20. 已知函数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$  ( $a > 0, b \in \mathbf{R}$ ) 有极值, 且导函数  $f'(x)$  的极值点是  $f(x)$  的零点. (极值点是指函数取极值时对应的自变量的值)
- (1) 求  $b$  关于  $a$  的函数关系式, 并写出定义域;
- (2) 证明:  $b^2 > 3a$ ;
- (3) 若  $f(x), f'(x)$  这两个函数的所有极值之和不小于  $-\frac{7}{2}$ , 求  $a$  的取值范围.

21. 四选二.

- 【A】如图,  $AB$  为半圆  $O$  的直径, 直线  $PC$  切半圆  $O$  于点  $C, AP \perp PC, P$  为垂足. 求证:
- (1)  $\angle PAC = \angle CAB$ ;
- (2)  $AC^2 = AP \cdot AB$ .



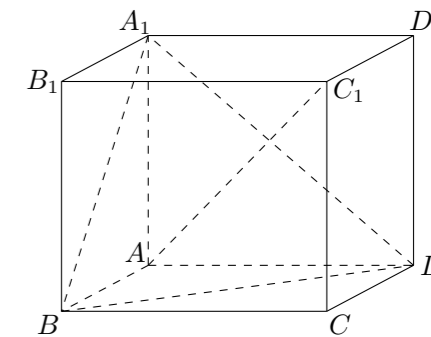
- 【B】已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

- (1) 求  $AB$ ;
- (2) 若曲线  $C_1: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$  在矩阵  $AB$  对应的变换作用下得到另一曲线  $C_2$ , 求  $C_2$  的方程.

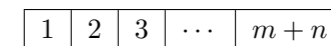
- 【C】在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = -8 + t, \\ y = \frac{t}{2}, \end{cases}$  ( $t$  为参数), 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2s^2, \\ y = 2\sqrt{2}s, \end{cases}$  ( $s$  为参数). 设  $P$  为曲线  $C$  上的动点, 求点  $P$  到直线  $l$  的距离的最小值.

- 【D】已知  $a, b, c, d$  为实数, 且  $a^2 + b^2 = 4, c^2 + d^2 = 16$ , 证明  $ac + bd \leq 8$ .

22. 如图, 在平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AA_1 \perp$  平面  $ABCD$ , 且  $AB = AD = 2, AA_1 = \sqrt{3}, \angle BAD = 120^\circ$ .
- (1) 求异面直线  $A_1B$  与  $AC_1$  所成角的余弦值;
- (2) 求二面角  $B - A_1D - A$  的正弦值.



23. 已知一个口袋有  $m$  个白球,  $n$  个黑球 ( $m, n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$ ), 这些球除颜色外全部相同. 现将口袋中的球随机的逐个取出, 并放入如图所示的编号为  $1, 2, 3, \dots, m+n$  的抽屉内, 其中第  $k$  次取出的球放入编号为  $k$  的抽屉 ( $k = 1, 2, 3, \dots, m+n$ ).



- (1) 试求编号为 2 的抽屉内放的是黑球的概率  $p$ ;
- (2) 随机变量  $X$  表示最后一个取出的黑球所在抽屉编号的倒数,  $E(X)$  是  $X$  的数学期望, 证明:  $E(X) < \frac{n}{(m+n)(n-1)}$ .