2018 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 理)

一、选择题

1. 设 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}$, 则 $|z|=$ ( )

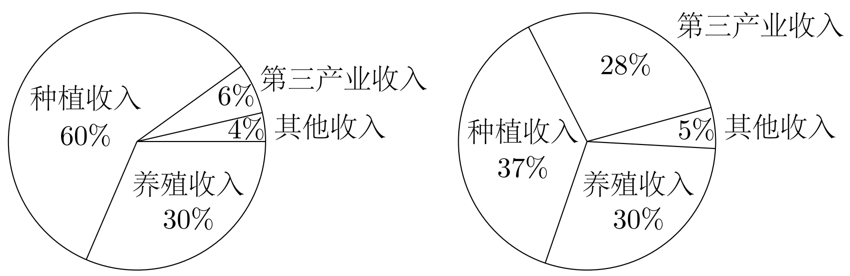
(A) 0　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) 1　(D) $\sqrt{2}$

2. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2>0\}$, 则 $\complement_{\mathbf{R}}A=$

(A) $\{x\mid -1<x<2\}$　(B) $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$

(C) $\{x\mid x<-1\}\cup\{x\mid x>2\}$　(D) $\{x\mid x\leqslant -1\}\cup\{x\mid x\geqslant 2\}$

3. 某地区经过一年的新农村建设, 农村的经济收入增加了一倍. 实现翻番. 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况, 统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例, 得到如下饼图:



建设前经济收入构成比例　　建设后经济收入构成比例

则下面结论中不正确的是 ( )

(A) 新农村建设后, 种植收入减少

(B) 新农村建设后, 其他收入增加了一倍以上

(C) 新农村建设后, 养殖收入增加了一倍

(D) 新农村建设后, 养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

4. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $3S_3=S_2+S_4$, $a_1=2$, 则 $a_5=$( )

(A) -12　(B) -10　(C) 10　(D) 12

5. 设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$. 若 $f(x)$ 为奇函数, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 ( )

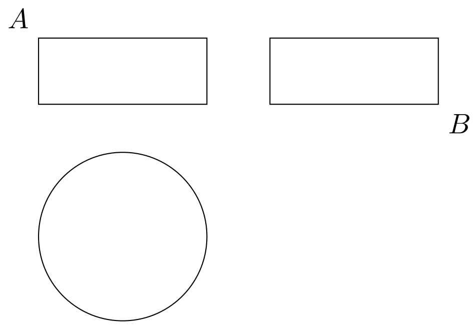
(A) $y=-2x$　(B) $y=-x$　(C) $y=2x$　(D) $y=x$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{EB}=$ ( )

(A) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　(B) $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

(C) $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　(D) $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

7. 某圆柱的高为 2, 底面周长为 16, 其三视图如图. 圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A, 圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B, 则在此圆柱侧面上, 从 M 到 N 的路径中, 最短路径的长度为 ( )



(A) $2\sqrt{17}$　(B) $2\sqrt{5}$　(C) 3　(D) 2

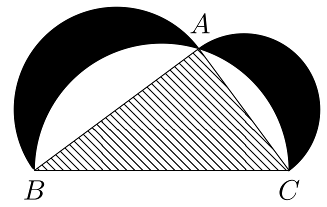
8. 设抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点为 F, 过点 $(-2,0)$ 且斜率为 $\dfrac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M, N 两点, 则 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=$ ( )

(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $[-1,0)$　(B) $[0,+\infty)$　(C) $[-1,+\infty)$　(D) $[1,+\infty)$

10. 如图来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形. 此图由三个半圆构成, 三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC, 直角边 AB, AC. $\triangle ABC$ 的三边所围成的区域记为 I, 黑色部分记为 II, 其余部分记为 III. 在整个图形中随机取一点, 此点取自 I, II, III 的概率分别记为 p_1, p_2, p_3, 则 ( )



(A) $p_1=p_2$　(B) $p_1=p_3$　(C) $p_2=p_3$　(D) $p_1=p_2+p_3$

11. 已知双曲线 C: $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$, O 为坐标原点, F 为 C 的右焦点, 过 F 的直线与 C 的两条渐近线的交点分别为 M, N. 若 $\triangle OMN$ 为直角三角形, 则 $|MN|=$ ( )

(A) $\dfrac{3}{2}$　(B) 3　(C) $2\sqrt{3}$　(D) 4

12. 已知正方体的棱长为 1, 每条棱所在直线与平面 α 所成的角相等, 则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为 ( )

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y-2\leqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0,\\ y\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为______.

14. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n=2a_n+1$, 则 $S_6=$______.

15. 从 2 位女生, 4 位男生中选 3 人参加科技比赛, 且至少有 1 位女生入选, 则不同的选法共有______种. (用数字填写答案)

16. 已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$, 则 $f(x)$ 的最小值是______.

三、解答题

17. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC=90^\circ$, $\angle A=45^\circ$, $AB=2$, $BD=5$.

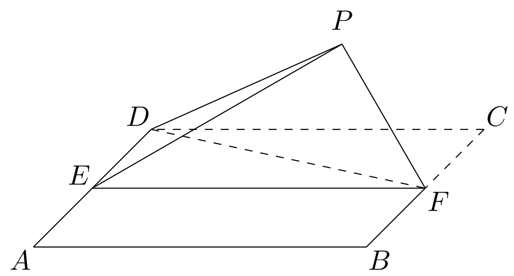
(1) 求 $\cos\angle ADB$;

(2) 若 $DC=2\sqrt{2}$, 求 BC.

18. 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, E, F 分别为 AD, BC 的中点, 以 DF 为折痕, 把 $\triangle DFC$ 折起, 使点 C 到达点 P 的位置, 且 $PF\perp BF$.

(1) 证明: 平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$;

(2) 求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值.



19. 设椭圆 C: $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F, 过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 点 M 的坐标为 $(2,0)$.
(1) 当 l 与 x 轴垂直时, 求直线 AM 的方程;
(2) 设 O 为坐标原点, 证明: $\angle OMA=\angle OMB$.

20. 某工厂的某种产品成箱包装, 每箱 200 件, 每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验, 如检验出不合格品, 则更换为合格品. 检验时, 先从这箱产品中任取 20 件作检验, 再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验, 设每件产品为不合格品的概率都为 p $(0<p<1)$, 且各件产品是否为不合格品相互独立.
(1) 记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 的最大值点 p_0;
(2) 现对一箱产品检验了 20 件, 结果恰有 2 件不合格品, 以 (1) 中确定的 p_0 作为 p 的值. 已知每件产品的检验费用为 2 元, 若有不合格品进入用户手中, 则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用.
① 若不对该箱余下的产品作检验, 这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X, 求 EX;
② 以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据, 是否该对这箱余下的所有产品作检验?

21. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$.
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2, 证明: $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y=k|x|+2$. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$.
(1) 求 C_2 的直角坐标方程;
(2) 若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

23. 已知 $f(x)=|x+1|-|ax-1|$.
(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)>1$ 的解集;
(2) 若 $x\in(0,1)$ 时不等式 $f(x)>x$ 成立, 求 a 的取值范围.