2018 普通高等学校招生考试 (全国卷 II 理)

一、选择题

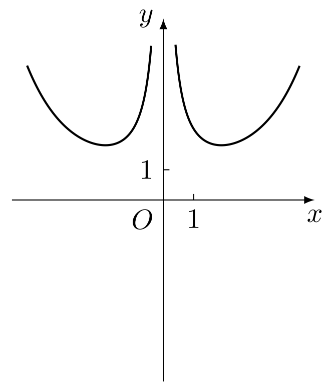
1. $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=$ ( )

(A) $-\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$ (B) $-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$ (C) $-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$ (D) $-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$

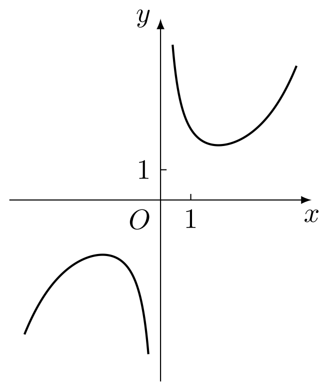
2. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 3,\ x\in\mathbf{Z},\ y\in\mathbf{Z}\}$, 则 A 中元素的个数为 ( )

(A) 9 (B) 8 (C) 5 (D) 4

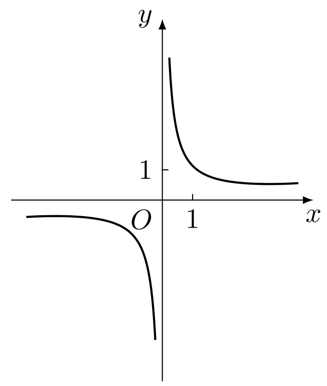
3. 函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$ 的图象大致为 ( )



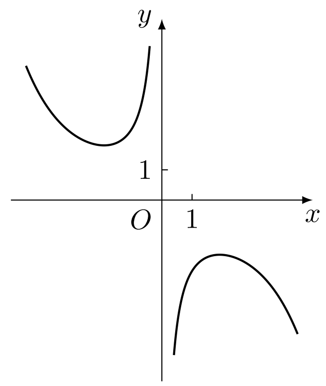
(A)



(B)



(C)



(D)

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$ ( )

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 0

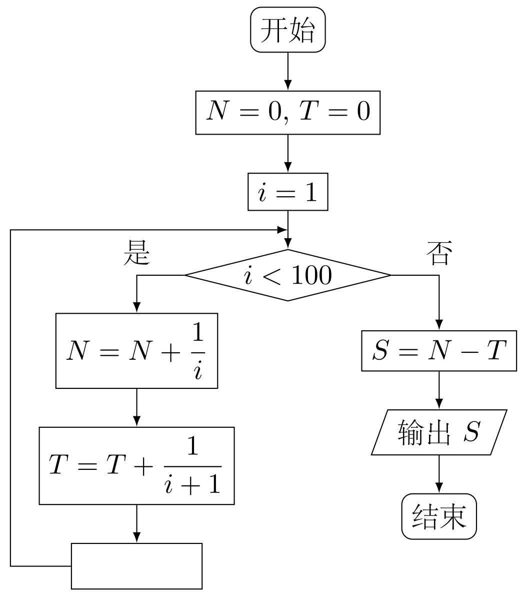
5. 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为( )

(A) $y=\pm\sqrt{2}x$ (B) $y=\pm\sqrt{3}x$ (C) $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ (D) $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $BC=1$, $AC=5$, 则 $AB=$ ( )

(A) $4\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{30}$ (C) $\sqrt{29}$ (D) $2\sqrt{5}$

7. 为计算 $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}$, 设计了如图的程序框图, 则在空白框中应填入 ( )



(A) $i=i+1$ (B) $i=i+2$ (C) $i=i+3$ (D) $i=i+4$

8. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 哥德巴赫猜想是"每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和", 如 $30=7+23$. 在不超过 30 的素数中, 随机选取两个不同的数, 其和等于 30 的概率是( )

(A) $\dfrac{1}{12}$ (B) $\dfrac{1}{14}$ (C) $\dfrac{1}{15}$ (D) $\dfrac{1}{18}$

9. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=1$, $AA_1=\sqrt{3}$, 则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 ( )

(A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$ (C) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. 若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[-a,a]$ 是减函数, 则 a 的最大值是 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{2}$ (C) $\dfrac{3\pi}{4}$ (D) π

11. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x)=f(1+x)$. 若 $f(1)=2$, 则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$ ( )

(A) -50 (B) 0 (C) 2 (D) 50

12. 已知 F_1, F_2 是椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左, 右焦点, A 是 C 的左顶点, 点 P 在过 A 且斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上, $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, $\angle F_1F_2P=120^\circ$, 则 C 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{4}$

二、填空题

13. 曲线 $y=2\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为______.

14. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0,\\ x-2y+3\geqslant 0,\\ x-5\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值为______.

15. 已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$, $\cos\alpha+\sin\beta=0$, 则 $\sin(\alpha+\beta)=$______.

16. 已知圆锥的顶点为 S, 母线 SA, SB 所成角的余弦值为 $\dfrac{7}{8}$, SA 与圆锥底面所成角为 45°, 若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$, 则该圆锥的侧面积为______.

三、解答题

17. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1=-7$, $S_3=-15$.

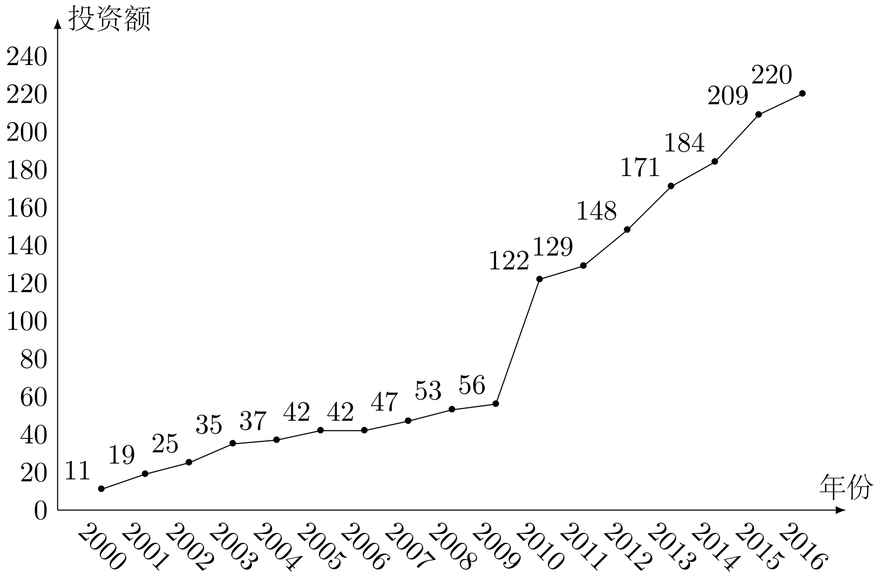
(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 S_n, 并求 S_n 的最小值.

18. 如图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y (单位: 亿元) 的折线图. 为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额, 建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型. 根据 2000 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 $1, 2, \cdots, 17$) 建立模型①: $\hat{y}=-30.4+13.5t$; 根据 2010 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 $1, 2, \cdots, 7$) 建立模型②: $\hat{y}=99+17.5t$.

(1) 分别利用这两个模型, 求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值;

(2) 你认为用哪个模型得到的预测值更可靠? 并说明理由.



19. 设抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点为 F, 过 F 且斜率为 k $(k>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|=8$.

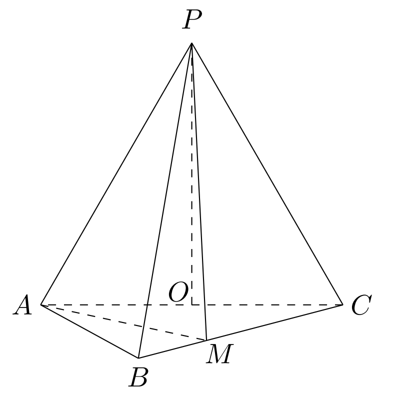
(1) 求 l 的方程;

(2) 求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

20. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB=BC=2\sqrt{2}$, $PA=PB=PC=AC=4$, O 为 AC 的中点.

(1) 证明: $PO\perp$ 平面 ABC;

(2) 若点 M 在棱 BC 上, 且二面角 $M-PA-C$ 为 30°, 求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值.



21. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2$.

(1) 若 $a=1$, 证明: 当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant 1$;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个零点, 求 a.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=4\sin\theta,\end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=2+t,\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数).

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2) 若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1,2)$, 求 l 的斜率.

23. 设函数 $f(x)=5-|x+a|-|x-2|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的解集;

(2) 若 $f(x)\leqslant 1$, 求 a 的取值范围.