2018 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

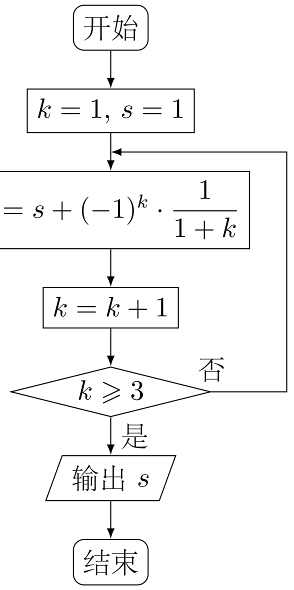
1. 已知集合 $A=\{x\mid |x|<2\}$, $B=\{-2,\ 0,\ 1,\ 2\}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{0,\ 1\}$ (B) $\{-1,\ 0,\ 1\}$ (C) $\{-2,\ 0,\ 1,\ 2\}$ (D) $\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$

2. 在复平面内, 复数 $\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$ 的共轭复数对应的点位于 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

3. 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为 ( )

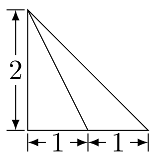


(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{5}{6}$ (C) $\dfrac{7}{6}$ (D) $\dfrac{7}{12}$

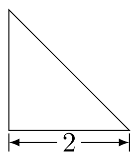
4. "十二平均律"是通用的音律体系, 明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例, 为这个理论的发展做出了重要贡献. 十二平均律将一个纯八度音程分成十二份, 依次得到十三个单音, 从第二个单音起, 每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$. 若第一个单音的频率为 f, 则第八个单音的频率为 ( )

(A) $\sqrt[3]{2}f$ (B) $\sqrt[3]{2^2}f$ (C) $\sqrt[12]{2^5}f$ (D) $\sqrt[12]{2^7}f$

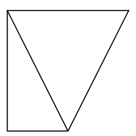
5. 某四棱锥的三视图如图所示, 在此四棱锥的侧面中, 直角三角形的个数为 ( )



正 (主) 视图



侧 (左) 视图



俯视图

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

6. 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 均为单位向量, 则"$|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=|3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$"是"$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 在平面直角坐标系中, 记 d 为点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 到直线 $x-my-2=0$ 的距离. 当 θ, m 变化时, d 的最大值为 ( )

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

8. 设集合 $A=\{(x,y)\mid x-y\geqslant 1,\ ax+y>4,\ x-ay\leqslant 2\}$, 则 ( )

(A) 对任意实数 a, $(2,1)\in A$ (B) 对任意实数 a, $(2,1)\notin A$

(C) 当且仅当 $a<0$ 时, $(2,1)\notin A$ (D) 当且仅当 $a\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时, $(2,1)\notin A$

二、填空题

9. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1=3$, $a_2+a_5=36$, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为______.

10. 在极坐标系中, 直线 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=a\ (a>0)$ 与圆 $\rho=2\cos\theta$ 相切, 则 $a=$______.

11. 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{6}\right)\ (\omega>0)$. 若 $f(x)\leqslant f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 对任意的实数 x 都成立, 则 ω 的最小值为______.

12. 若 x, y 满足 $x+1\leqslant y\leqslant 2x$, 则 $2y-x$ 的最小值是______.

13. 能说明"若 $f(x)>f(0)$ 对任意的 $x\in(0,2]$ 都成立, 则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上是增函数"为假命题的一个函数是______.

14. 已知椭圆 M: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$, 双曲线 N: $\dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1$. 若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点, 则椭圆 M 的离心率为______; 双曲线 N 的离心率为______.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=7$, $b=8$, $\cos B=-\dfrac{1}{7}$.

(1) 求 $\angle A$;

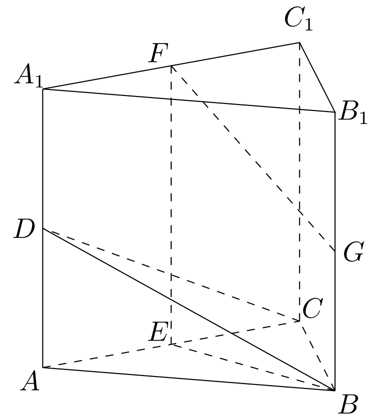
(2) 求 AC 边上的高.

16. 如图, 在三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CC_1\perp$ 平面 ABC, D, E, F, G 分别为 AA_1, AC, A_1C_1, BB_1 的中点, $AB=BC=\sqrt{5}$, $AC=AA_1=2$.

(1) 求证: $AC\perp$ 平面 BEF;

(2) 求二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值;

(3) 证明: 直线 FG 与平面 BCD 相交.



17. 电影公司随机收集了电影的有关数据, 经分类整理得到下表:

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类
电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指: 一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值.

假设所有电影是否获得好评相互独立.

(1) 从电影公司收集的电影中随机选取 1 部, 求这部电影是获得好评的第四类电影的概率;

(2) 从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部, 估计恰有 1 部获得好评的概率;

(3) 假设每类电影得到人们喜欢的概率与表格中该类电影的好评率相等. 用"$\xi_k=1$"表示第 k 类电影得到人们喜欢, "$\xi_k=0$"表示第 k 类电影没有得到人们喜欢 $(k=1,2,3,4,5,6)$. 写出方差 $D\xi_1$, $D\xi_2$, $D\xi_3$, $D\xi_4$, $D\xi_5$, $D\xi_6$ 的大小关系.

18. 设函数 $f(x)=\left[ax^2-(4a+1)x+4a+3\right]\mathrm{e}^x$.

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行, 求 a;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值, 求 a 的取值范围.

19. 已知抛物线 C: $y^2=2px$ 经过点 $P(1,2)$. 过点 $Q(0,1)$ 的直线 l 与抛物线 C 有两个不同的交点 A, B, 且直线 PA 交 y 轴于 M, 直线 PB 交 y 轴于 N.

(1) 求直线 l 的斜率的取值范围;

(2) 设 O 为原点, $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$, $\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$, 求证: $\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$ 为定值.

20. 设 n 为正整数, 集合 $A=\{\alpha|\alpha=(t_1,t_2,\cdots,t_n),\ t_k\in\{0,\ 1\},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$. 对于集合 A 中的任意元素 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, 记 $M(\alpha,\beta)=\dfrac{1}{2}[(x_1+y_1-|x_1-y_1|)+(x_2+y_2-|x_2-y_2|)+\cdots+(x_n+y_n-|x_n-y_n|)]$.

(1) 当 $n=3$ 时, 若 $\alpha=(1,1,0)$, $\beta=(0,1,1)$, 求 $M(\alpha,\alpha)$ 和 $M(\alpha,\beta)$ 的值;

(2) 当 $n=4$ 时, 设 B 是 A 的子集, 且满足: 对于 B 中的任意元素 α, β, 当 α, β 相同时, $M(\alpha,\beta)$ 是奇数; 当 α, β 不同时, $M(\alpha,\beta)$ 是偶数. 求集合 B 中元素个数的最大值;

(3) 给定不小于 2 的 n, 设 B 是 A 的子集, 且满足: 对于 B 中的任意两个不同的元素 α, β, $M(\alpha,\beta)=0$. 写出一个集合 B, 使其元素个数最多, 并说明理由.