2018 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

1. 设全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A=\{x\mid 0<x<2\}$, $B=\{x\mid x\geqslant 1\}$, 则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$ ( )

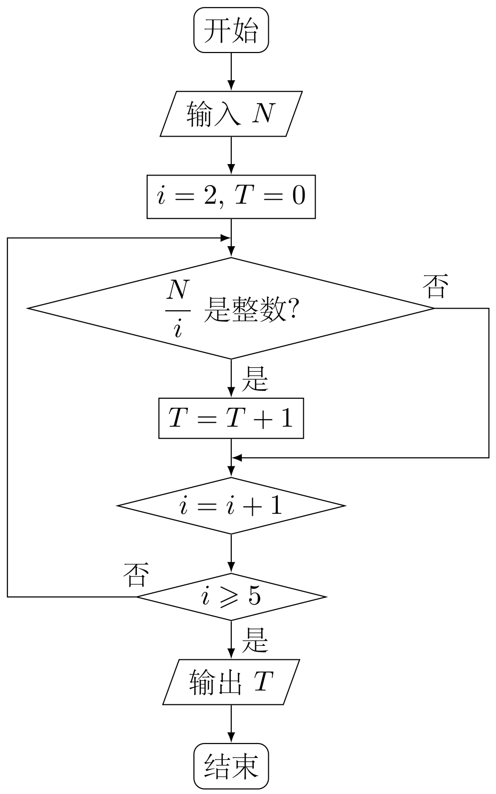
(A) $\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$ (B) $\{x\mid 0<x<1\}$

(C) $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$ (D) $\{x\mid 0<x<2\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 5,\\ 2x-y\leqslant 4,\\ -x+y\leqslant 1,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=3x+5y$ 的最大值为 ( )

(A) 6 (B) 19 (C) 21 (D) 45

3. 阅读如图所示的程序框图, 运行相应的程序, 若输入 N 的值为 20, 则输出 T 的值为 ( )



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

4. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则"$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$"是"$x^3<1$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 已知 $a=\log_2 \mathrm{e}$, $b=\ln 2$, $c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ( )

(A) $a>b>c$ (B) $b>a>c$ (C) $c>b>a$ (D) $c>a>b$

6. 将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{10}$ 个单位长度, 所得图象对应的函数 ( )

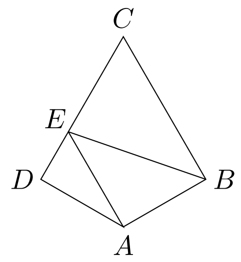
(A) 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增 (B) 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ 上单调递减

(C) 在区间 $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递增 (D) 在区间 $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 上单调递减

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 2, 过右焦点且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A, B 两点. 设 A, B 到双曲线同一条渐近线的距离分别为 d_1 和 d_2, 且 $d_1+d_2=6$, 则双曲线的方程为 ( )

(A) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ (B) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ (C) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$ (D) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$

8. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB\perp BC$, $AD\perp CD$, $\angle BAD=120°$, $AB=AD=1$. 若点 E 为边 CD 上的动点, 则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最小值为 ( )



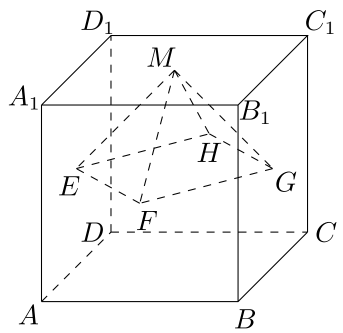
(A) $\frac{21}{16}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{25}{16}$ (D) 3

二、填空题

9. i 是虚数单位, 复数 $\frac{6+7\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=$______.

10. 在 $\left(x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为______.

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 除面 $ABCD$ 外, 该正方体其余各面的中心分别为点 E, F, G, H, M (如图), 则四棱锥 $M-EFGH$ 的体积为______.



12. 已知圆 $x^2+y^2-2x=0$ 的圆心为 C, 直线 $\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=3-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$ (t 为参数) 与该圆相交于 A, B 两点, 则 $\triangle ABC$ 的面积为______.

13. 已知 a, $b\in\mathbf{R}$, 且 $a-3b+6=0$, 则 $2^a+\frac{1}{8^b}$ 的最小值为______.

14. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2ax+a, & x\leqslant 0,\\ -x^2+2ax-2a, & x>0.\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=ax$ 恰有 2 个互异的实数解, 则 a 的取值范围是______.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $b\sin A=a\cos\left(B-\frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 设 $a=2$, $c=3$, 求 b 和 $\sin(2A-B)$ 的值.

16. 已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为 24, 16, 16. 现采用分层抽样的方法从中抽取 7 人, 进行睡眠时间的调查.

(1) 应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人?

(2) 若抽出的 7 人中有 4 人睡眠不足, 3 人睡眠充足, 现从这 7 人中随机抽取 3 人做进一步的身体检查.

① 用 X 表示抽取的 3 人中睡眠不足的员工人数, 求随机变量 X 的分布列与数学期望;

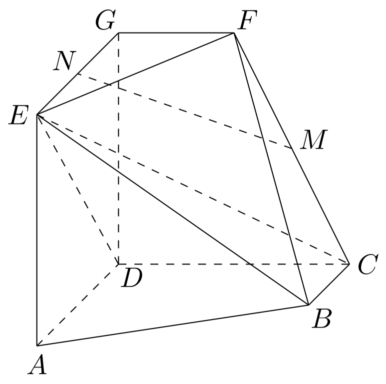
② 设 A 为事件"抽取的 3 人中, 既有睡眠充足的员工, 也有睡眠不足的员工", 求事件 A 发生的概率.

17. 如图, $AD \parallel BC$ 且 $AD = 2BC$, $AD \perp CD$, $EG \parallel AD$ 且 $EG = AD$, $CD \parallel FG$ 且 $CD = 2FG$, $DG \perp$ 平面 $ABCD$, $DA = DC = DG = 2$.

(1) 若 M 为 CF 的中点, N 为 EG 的中点, 求证: $MN \parallel$ 平面 CDE;

(2) 求二面角 $E-BC-F$ 的正弦值;

(3) 若点 P 在线段 DG 上, 且直线 BP 与平面 $ADGE$ 所成的角为 $60°$, 求线段 DP 的长.



18. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 其前 n 项和为 S_n $(n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是等差数列. 已知 $a_1 = 1$, $a_3 = a_2 + 2$, $a_4 = b_3 + b_5$, $a_5 = b_4 + 2b_6$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n $(n \in \mathbf{N}^*)$.

① 求 T_n;

② 证明 $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(T_k + b_{k+2})\, b_k}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{2^{n+2}}{n+2} - 2$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

19. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的左焦点为 F, 上顶点为 B. 已知椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, 点 A 的坐标为 $(b, 0)$, 且 $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设直线 l: $y = kx$ $(k > 0)$ 与椭圆在第一象限的交点为 P, 且 l 与直线 AB 交于点 Q. 若 $\dfrac{|AQ|}{|PQ|} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4} \sin\angle AOQ$ (O 为原点), 求 k 的值.

20. 已知函数 $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_a x$, 其中 $a > 1$.

(1) 求函数 $h(x) = f(x) - x\ln a$ 的单调区间;

(2) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线与曲线 $y = g(x)$ 在点 $(x_2, g(x_2))$ 处的切线平行, 证明 $x_1 + g(x_2) = -\dfrac{2\ln\ln a}{\ln a}$;

(3) 证明当 $a \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时, 存在直线 l, 使 l 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 也是曲线 $y = g(x)$ 的切线.