2019 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

一、选择题

1. 设 $z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$, 则 $|z|=$ ( )

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 1

2. 已知集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, $A=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{2,\ 3,\ 6,\ 7\}$, 则 $B\cap\complement_U A=$ ( )

(A) $\{1,\ 6\}$ (B) $\{1,\ 7\}$ (C) $\{6,\ 7\}$ (D) $\{1,\ 6,\ 7\}$

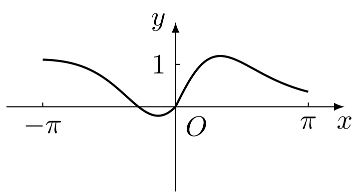
3. 已知 $a=\log_2 0.2$, $b=2^{0.2}$, $c=0.2^{0.3}$, 则 ( )

(A) $a<b<c$ (B) $a<c<b$ (C) $c<a<b$ (D) $b<c<a$

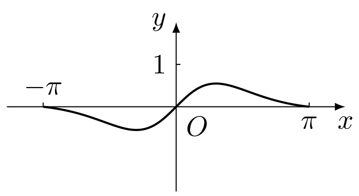
4. 古希腊时期, 人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$, 称为黄金分割比例), 著名的"断臂维纳斯"便是如此. 此外, 最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 若某人满足上述两个黄金分割比例, 且腿长为 105 cm, 头顶至脖子下端的长度为 26 cm, 则其身高可能是 ( )

(A) 165 cm (B) 175 cm (C) 185 cm (D) 190 cm

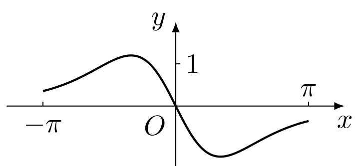
5. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图象大致为 ( )



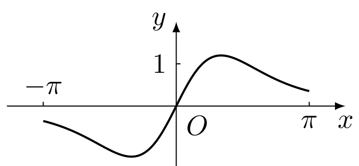
(A)



(B)



(C)



(D)

6. 某学校为了解 1000 名新生的身体素质, 将这些学生编号为 1, 2, $\cdots$, 1000, 从这些新生中用系统抽样方法等距抽取 100 名学生进行体质测验. 若 46 号学生被抽到, 则下面 4 名学生中被抽到的是 ( )

(A) 8 号学生 (B) 200 号学生 (C) 616 号学生 (D) 815 号学生

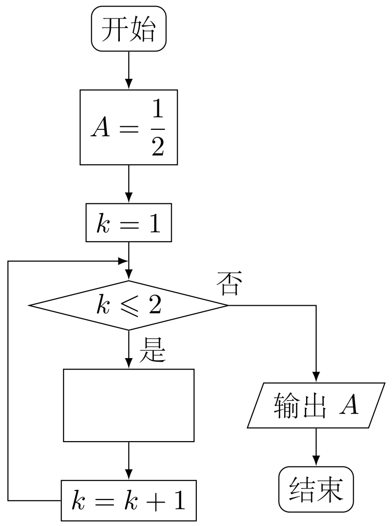
7. $\tan 255^\circ=$ ( )

(A) $-2-\sqrt{3}$ (B) $-2+\sqrt{3}$ (C) $2-\sqrt{3}$ (D) $2+\sqrt{3}$

8. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$, 且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为( )

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{2\pi}{3}$ (D) $\dfrac{5\pi}{6}$

9. 如图是求 $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$ 的程序框图, 图中空白框中应填入 ( )



(A) $A=\dfrac{1}{2+A}$ (B) $A=2+\dfrac{1}{A}$ (C) $A=\dfrac{1}{1+2A}$ (D) $A=1+\dfrac{1}{2A}$

10. 双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 130°, 则 C 的离心率为 ( )

(A) $2\sin 40^\circ$ (B) $2\cos 40^\circ$ (C) $\dfrac{1}{\sin 50^\circ}$ (D) $\dfrac{1}{\cos 50^\circ}$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $a\sin A-b\sin B=4c\sin C$, $\cos A=-\dfrac{1}{4}$, 则 $\dfrac{b}{c}=$ ( )

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3

12. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, 过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点. 若 $|AF_2|=2|F_2B|$, $|AB|=|BF_1|$, 则 C 的方程为 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ (B) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ (D) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

二、填空题

13. 曲线 $y=3(x^2+x)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为______.

14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=1$, $S_3=\dfrac{3}{4}$, 则 $S_4=$______.

15. 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{3\pi}{2}\right)-3\cos x$ 的最小值为______.

16. 已知 $\angle ACB=90^\circ$, P 为平面 ABC 外一点, $PC=2$, 点 P 到 $\angle ACB$ 两边 AC, BC 的距离均为 $\sqrt{3}$, 那么 P 到平面 ABC 的距离为______.

三、解答题

17. 某商场为提高服务质量, 随机调查了 50 名男顾客和 50 名女顾客, 每位顾客对该商场的服务给出满意或不满意的评价, 得到如表列联表:

	满意	不满意
男顾客	40	10
女顾客	30	20

(1) 分别估计男、女顾客对该商场服务满意的概率;

(2) 能否有 95% 的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异?

附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_9=-a_5$.

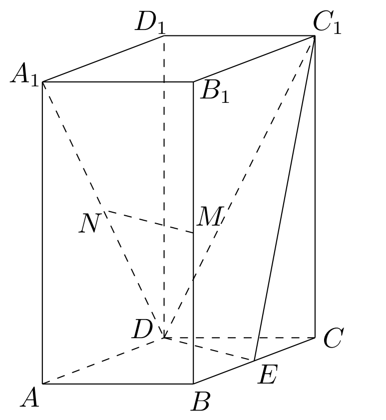
(1) 若 $a_3=4$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_1>0$, 求使得 $S_n\geqslant a_n$ 的 n 的取值范围.

19. 如图, 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形, $AA_1=4$, $AB=2$, $\angle BAD=60°$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.

(1) 证明: $MN\parallel$ 平面 C_1DE;

(2) 求点 C 到平面 C_1DE 的距离.



20. 已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数.

(1) 证明: $f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点;

(2) 若 $x\in[0,\pi]$ 时, $f(x)\geqslant ax$, 求 a 的取值范围.

21. 已知点 A, B 关于坐标原点 O 对称, $|AB|=4$, $\odot M$ 过点 A, B 且与直线 $x+2=0$ 相切.

(1) 若 A 在直线 $x+y=0$ 上, 求 $\odot M$ 的半径;

(2) 是否存在定点 P, 使得当 A 运动时, $|MA|-|MP|$ 为定值? 并说明理由.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2}, \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$.

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2) 求 C 上的点到 l 距离的最小值.

23. 已知 a, b, c 为正数, 且满足 $abc=1$. 证明:

(1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$;

(2) $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$.