2019 普通高等学校招生考试 (北京卷文)

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid -1<x<2\}$, $B=\{x\mid x>1\}$, 则 $A\cup B=$ ( )

(A) $(-1,1)$ (B) $(1,2)$ (C) $(-1,+\infty)$ (D) $(1,+\infty)$

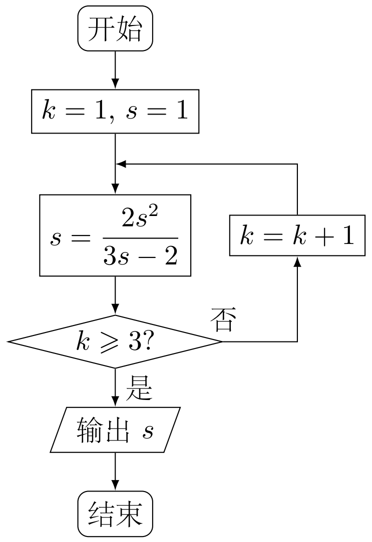
2. 已知复数 $z=2+\mathrm{i}$, 则 $z\cdot\overline{z}=$ ( )

(A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) 3 (D) 5

3. 下列函数中, 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是 ( )

(A) $y=x^{\frac{1}{2}}$ (B) $y=2^{-x}$ (C) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ (D) $y=\dfrac{1}{x}$

4. 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为 ( )



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\,(a>0)$ 的离心率是 $\sqrt{5}$, 则 $a=$ ( )

(A) $\sqrt{6}$ (B) 4 (C) 2 (D) $\dfrac{1}{2}$

6. 设函数 $f(x)=\cos x+b\sin x$ (b 为常数), 则"$b=0$"是"$f(x)$ 为偶函数"的 ( )

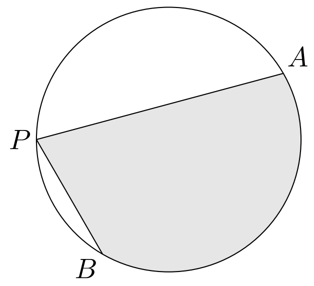
(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\dfrac{5}{2}\lg\dfrac{E_1}{E_2}$, 其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k $(k=1,\ 2)$. 已知太阳的星等是 -26.7, 天狼星的星等是 -1.45, 则太阳与天狼星的亮度的比值为 ( )

(A) $10^{10.1}$ (B) 10.1 (C) $\lg 10.1$ (D) $10^{-10.1}$

8. 如图, A, B 是半径为 2 的圆周上的定点, P 为圆周上的动点, $\angle APB$ 是锐角, 大小为 β. 图中阴影区域的面积的最大值为 ( )



(A) $4\beta+4\cos\beta$ (B) $4\beta+4\sin\beta$ (C) $2\beta+2\cos\beta$ (D) $2\beta+2\sin\beta$

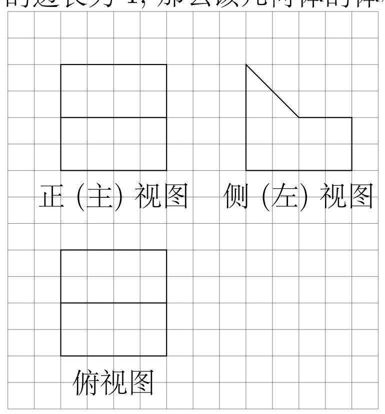
二、填空题

9. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-4,3)$, $\boldsymbol{b}=(6,m)$, 且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $m=$______.

10. 若 x, y 满足 $\begin{cases}x\leqslant 2,\\ y\geqslant -1,\\ 4x-3y+1\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $y-x$ 的最小值为______, 最大值为______.

11. 设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 准线为 l. 则以 F 为圆心, 且与 l 相切的圆的方程为______.

12. 某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得, 其三视图如图所示. 如果网格纸上小正方形的边长为 1, 那么该几何体的体积为______.



13. 已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线. 给出下列三个论断:

① $l\perp m$;

② $m\parallel\alpha$;

③ $l\perp\alpha$.

以其中的两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出一个正确的命题: ______.

14. 李明自主创业, 在网上经营一家水果店, 销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃, 价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒. 为增加销量, 李明对这四种水果进行促销: 一次购买水果的总价达到 120 元, 顾客就少付 x 元. 每笔订单顾客网上支付成功后, 李明会得到支付款的 80%.

① 当 $x=10$ 时, 顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒, 需要支付______元;

② 在促销活动中, 为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折, 则 x 的最大值为______.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3$, $b-c=2$, $\cos B=-\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 b, c 的值;

(2) 求 $\sin(B+C)$ 的值.

16. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1=-10$, 且 a_2+10, a_3+8, a_4+6 成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

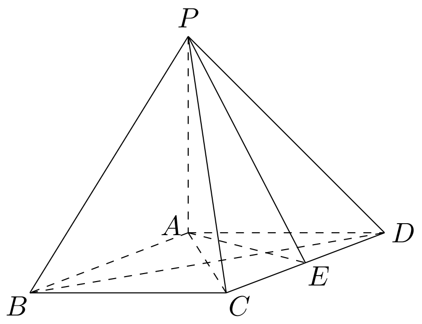
(2) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 求 S_n 的最小值.

17. 改革开放以来, 人们的支付方式发生了巨大转变. 近年来, 移动支付已成为主要支付方式之一. 为了解某校学生上个月 A, B 两种移动支付方式的使用情况, 从全校所有的 1000 名学生中随机抽取了 100 人, 发现样本中 A, B 两种支付方式都不使用的有 5 人, 样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下:

支付金额 / 支付方式	不大于 2000 元	大于 2000 元
仅使用 A	27 人	3 人
仅使用 B	24 人	1 人

(1) 估计该校学生中上个月 A, B 两种支付方式都使用的人数;
(2) 从样本仅使用 B 的学生中随机抽取 1 人, 求该学生上个月支付金额大于 2000 元的概率;
(3) 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化. 现从样本仅使用 B 的学生中随机抽查 1 人, 发现他本月的支付金额大于 2000 元. 结合 (2) 的结果, 能否认为样本仅使用 B 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化? 说明理由.

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 底部 $ABCD$ 为菱形, E 为 CD 的中点.
(1) 求证: $BD\perp$ 平面 PAC;
(2) 若 $\angle ABC=60^\circ$, 求证: 平面 $PAB\perp$ 平面 PAE;
(3) 棱 PB 上是否存在点 F, 使得 $CF\parallel$ 平面 PAE? 说明理由.



19. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为 $(1,0)$, 且经过点 $A(0,1)$.
(1) 求椭圆 C 的方程;
(2) 设 O 为原点, 直线 l: $y=kx+t$ $(t\neq\pm1)$ 与椭圆 C 交于两个不同点 P, Q, 直线 AP 与 x 轴交于点 M, 直线 AQ 与 x 轴交于点 N, 若 $|OM|\cdot|ON|=2$, 求证: 直线 l 经过定点.

20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$.
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程;
(2) 当 $x\in[-2,4]$ 时, 求证: $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$;
(3) 设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|$ $(a\in\mathbf{R})$, 记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 $M(a)$. 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.