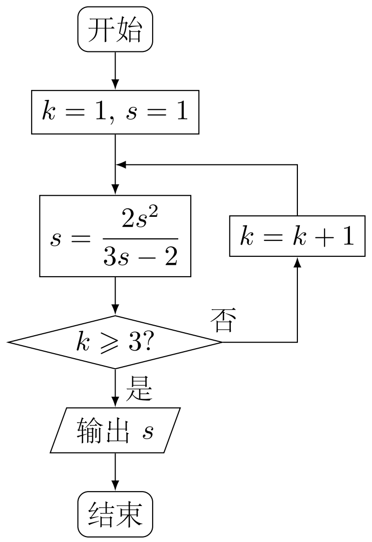
2019 普通高等学校招生考试 (北京卷理)

一、选择题

1. 已知复数 $z=2+\mathrm{i}$, 则 $z\cdot\overline{z}=$ ( )

(A) $\sqrt{3}$　(B) $\sqrt{5}$　(C) 3　(D) 5

2. 执行如图所示的程序框图, 输出的 s 值为 ( )



(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

3. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+3t,\\ y=2+4t,\end{cases}$ (t 为参数), 则点 $(1,0)$ 到直线 l 的距离是 ( )

(A) $\dfrac{1}{5}$　(B) $\dfrac{2}{5}$　(C) $\dfrac{4}{5}$　(D) $\dfrac{6}{5}$

4. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$, 则 ( )

(A) $a^2=2b^2$　(B) $3a^2=4b^2$　(C) $a=2b$　(D) $3a=4b$

5. 若 x,y 满足 $|x|\leqslant 1-y$, 且 $y\geqslant -1$, 则 $3x+y$ 的最大值为 ( )

(A) -7　(B) 1　(C) 5　(D) 7

6. 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\dfrac{5}{2}\lg\dfrac{E_1}{E_2}$, 其中星等为 m_k 的星的亮度为 $E_k\ (k=1,\ 2)$. 已知太阳的星等是 -26.7, 天狼星的星等是 -1.45, 则太阳与天狼星的亮度的比值为 ( )

(A) $10^{10.1}$　(B) 10.1　(C) $\lg 10.1$　(D) $10^{-10.1}$

7. 设点 A, B, C 不共线, 则"$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为锐角"是"$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|>\left|\overrightarrow{BC}\right|$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

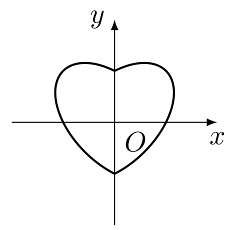
8. 数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线, 曲线 C: $x^2+y^2=1+|x|y$ 就是其中之一 (如图). 给出下列三个结论:

① 曲线 C 恰好经过 6 个整点 (即横、纵坐标均为整数的点);

② 曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$;

③ 曲线 C 所围成的"心形"区域的面积小于 3.

其中, 所有正确结论的序号是 ( )



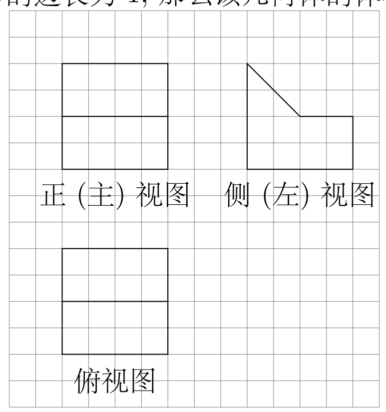
(A) ①　(B) ②　(C) ①②　(D) ①②③

二、填空题

9. 函数 $f(x)=\sin^2 2x$ 的最小正周期是______.

10. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 若 $a_2=-3$, $S_5=-10$, 则 $a_5=$______, S_n 的最小值为______.

11. 某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得, 其三视图如图所示. 如果网格纸上小正方形的边长为 1, 那么该几何体的体积为______.



12. 已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线. 给出下列三个论断:

① $l\perp m$;

② $m\parallel\alpha$;

③ $l\perp\alpha$.

以其中的两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出一个正确的命题: ______.

13. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^{-x}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a=$______; 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则 a 的取值范围是______.

14. 李明自主创业, 在网上经营一家水果店, 销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃, 价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒. 为增加销量, 李明对这四种水果进行促销: 一次购买水果的总价达到 120 元, 顾客就少付 x 元. 每笔订单顾客网上支付成功后, 李明会得到支付款的 80%.

① 当 $x=10$ 时, 顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒, 需要支付______元;

② 在促销活动中, 为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折, 则 x 的最大值为______.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=3$, $b-c=2$, $\cos B=-\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 b, c 的值;

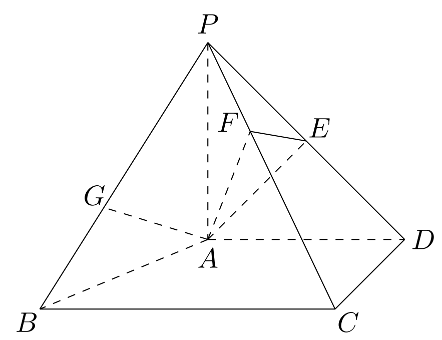
(2) 求 $\sin(B-C)$ 的值.

16. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AD\perp CD$, $AD\parallel BC$, $PA=AD=CD=2$, $BC=3$. E 为 PD 的中点, 点 F 在 PC 上, 且 $\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{1}{3}$.

(1) 求证: $CD\perp$ 平面 PAD;

(2) 求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值;

(3) 设点 G 在 PB 上, 且 $\dfrac{PG}{PB}=\dfrac{2}{3}$. 判断直线 AG 是否在平面 AEF 内, 说明理由.



17. 改革开放以来, 人们的支付方式发生了巨大转变. 近年来, 移动支付已成为主要支付方式之一. 为了解某校学生上个月 A, B 两种移动支付方式的使用情况, 从全校学生中随机抽取了 100 人, 发现样本中 A, B 两种支付方式都不使用的有 5 人, 样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下:

支付金额 (元) / 支付方式	$(0,1000]$	$(1000,2000]$	大于 2000
仅使用 A	18 人	9 人	3 人
仅使用 B	10 人	14 人	1 人

(1) 从全校学生中随机抽取 1 人, 估计该学生上个月 A, B 两种支付方式都使用的概率;
(2) 从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取 1 人, 以 X 表示这 2 人中上个月支付金额大于 1000 元的人数, 求 X 的分布列和数学期望;
(3) 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化. 现从样本仅使用 A 的学生中, 随机抽查 3 人, 发现他们本月的支付金额都大于 2000 元. 根据抽查结果, 能否认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化? 说明理由.

18. 已知抛物线 C: $x^2=-2py$ 经过点 $(2,-1)$.
(1) 求抛物线 C 的方程及其准线方程;
(2) 设 O 为原点, 过抛物线 C 的焦点作斜率不为 0 的直线 l 交抛物线 C 于两点 M, N, 直线 $y=-1$ 分别交直线 OM, ON 于点 A 和点 B. 求证: 以 AB 为直径的圆经过 y 轴上的两个定点.

19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$.
(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程;
(2) 当 $x\in[-2,4]$ 时, 求证: $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$;
(3) 设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|$ $(a\in\mathbf{R})$, 记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 $M(a)$. 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ 从中选取第 i_1 项、第 i_2 项、$\cdots$、第 i_m 项 $(i_1<i_2<\cdots<i_m)$, 若 $a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_m}$, 则称新数列 a_{i_1}, a_{i_2}, $\cdots$, a_{i_m} 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的递增子列. 规定: 数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的递增子列.
(1) 写出数列 1, 8, 3, 7, 5, 6, 9 的一个长度为 4 的递增子列;
(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的长度为 p 的递增子列的末项的最小值为 a_{m_0}, 长度为 q 的递增子列的末项的最小值为 a_{n_0}. 若 $p<q$, 求证: $a_{m_0}<a_{n_0}$;
(3) 设无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正整数, 且任意两项均不相等. 若 $\{a_n\}$ 的长度为 s 的递增子列末项的最小值为 $2s-1$, 且长度为 s 末项为 $2s-1$ 的递增子列恰有 2^{s-1} 个 $(s=1,\ 2,\ \cdots)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.