2019 普通高等学校招生考试 (天津卷文)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{-1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4\}$, $C=\{x\in\mathbf{R}\mid 1\leqslant x<3\}$, 则 $(A\cap C)\cup B=$ ( )

(A) $\{2\}$ (B) $\{2,\ 3\}$ (C) $\{-1,\ 2,\ 3\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0,\\ x-y+2\geqslant 0,\\ x\geqslant -1,\\ y\geqslant -1,\end{cases}$ 则目标函数 $z=-4x+y$ 的最大值为 ( )

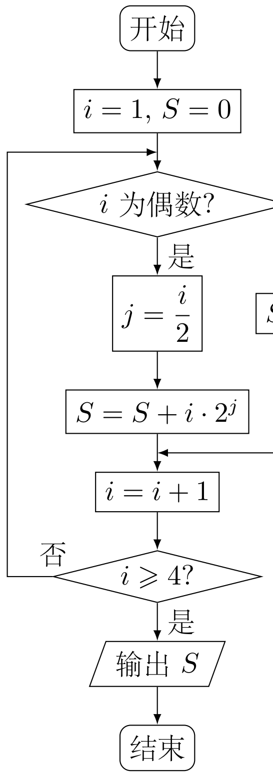
(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6

3. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则“$0<x<5$”是“$|x-1|<1$”的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 阅读如图的程序框图, 运行相应的程序, 输出 S 的值为 ( )



(A) 5 (B) 8 (C) 24 (D) 29

5. 已知 $a=\log_2 7$, $b=\log_3 8$, $c=0.3^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ( )

(A) $c<b<a$ (B) $a<b<c$ (C) $b<c<a$ (D) $c<a<b$

6. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 准线为 l. 若 l 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B, 且 $|AB|=4|OF|$ (O 为原点), 则双曲线的离心率为 ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

7. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\pi)$ 是奇函数, 且 $f(x)$ 的最小正周期为 π, 将 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图象对应的函数为 $g(x)$. 若 $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, 则 $f\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)=$ ( )

(A) -2 (B) $-\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>1,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=-\dfrac{1}{4}x+a$ $(a\in\mathbf{R})$ 恰有两个互异的实数解, 则 a 的取值范围为 ( )

(A) $\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]$ (B) $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]$ (C) $\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]\cup\{1\}$ (D) $\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}\right]\cup\{1\}$

二、填空题

9. i 是虚数单位, 则 $\left|\dfrac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$ 的值为______.

10. 设 $x\in\mathbf{R}$, 使不等式 $3x^2+x-2<0$ 成立的 x 的取值范围为______.

11. 曲线 $y=\cos x-\dfrac{x}{2}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为______.

12. 已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形, 侧棱长均为 $\sqrt{5}$. 若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点, 另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心, 则该圆柱的体积为______.

13. 设 $x>0$, $y>0$, $x+2y=5$, 则 $\dfrac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为______.

14. 在四边形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, $AB=2\sqrt{3}$, $AD=5$, $\angle A=30^\circ$, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 且 $AE=BE$, 则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$______.

三、解答题

15. 2019 年, 我国施行个人所得税专项附加扣除办法, 涉及子女教育、继续教育、大病医疗、住房贷款利息或者住房租金、赡养老人等六项专项附加扣除. 某单位老、中、青员工分别有 72, 108, 120 人, 现采用分层抽样的方法, 从该单位上述员工中抽取 25 人调查专项附加扣除的享受情况.

员工 / 项目	A	B	C	D	E	F
子女教育	○	○	×	○	×	○
继续教育	×	×	○	×	○	○
大病医疗	×	×	×	○	×	×
住房贷款利息	○	○	×	×	○	○
住房租金	×	×	○	×	×	×
赡养老人	○	○	×	×	×	○

(1) 应从老、中、青员工中分别抽取多少人?

(2) 抽取的 25 人中, 享受至少两项专项附加扣除的员工有 6 人, 分别记为 A, B, C, D, E, F. 享受情况如表, 其中“○”表示享受, “×”表示不享受. 现从这 6 人中随机抽取 2 人接受采访.

① 试用所给字母列举出所有可能的抽取结果;

② 设 M 为事件“抽取的 2 人享受的专项附加扣除至少有一项相同”, 求事件 M 发生的概率.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $b+c=2a$, $3c\sin B=4a\sin C$.

(1) 求 $\cos B$ 的值;

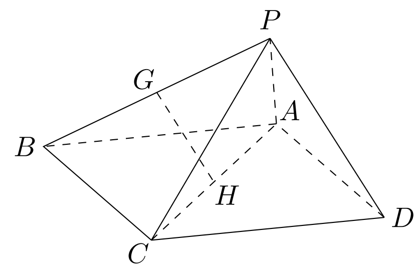
(2) 求 $\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\triangle PCD$ 为等边三角形, 平面 $PAC\perp$ 平面 PCD, $PA\perp CD$, $CD=2$, $AD=3$.

(1) 设 G, H 分别为 PB, AC 的中点, 求证: $GH\parallel$ 平面 PAD;

(2) 求证: $PA\perp$ 平面 PCD;

(3) 求直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值.



18. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 公比大于 0, 已知 $a_1 = b_1 = 3$, $b_2 = a_3$, $b_3 = 4a_2 + 3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数}, \\ b_{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 求 $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{2n}c_{2n}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

19. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 的左焦点为 F, 左顶点为 A, 上顶点为 B. 已知 $\sqrt{3}|OA| = 2|OB|$ (O 为原点).

(1) 求椭圆的离心率;

(2) 设经过点 F 且斜率为 $\dfrac{3}{4}$ 的直线 l 与椭圆在 x 轴上方的交点为 P, 圆 C 同时与 x 轴和直线 l 相切, 圆心 C 在直线 $x = 4$ 上, 且 $OC \parallel AP$, 求椭圆的方程.

20. 设函数 $f(x) = \ln x - a(x-1)\mathrm{e}^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $a \leqslant 0$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $0 < a < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$,

① 证明 $f(x)$ 恰有两个零点;

② 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, x_1 为 $f(x)$ 的零点, 且 $x_1 > x_0$, 证明 $3x_0 - x_1 > 2$.