2019 普通高等学校招生考试 (天津卷理)

一、选择题

1. 设集合 $A=\{-1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4\}$, $C=\{x\in\mathbf{R}\mid 1\leqslant x<3\}$, 则 $(A\cap C)\cup B=$ ( )

(A) $\{2\}$ (B) $\{2,\ 3\}$ (C) $\{-1,\ 2,\ 3\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0,\\ x-y+2\geqslant 0,\\ x\geqslant -1,\\ y\geqslant -1,\end{cases}$ 则目标函数 $z=-4x+y$ 的最大值为 ( )

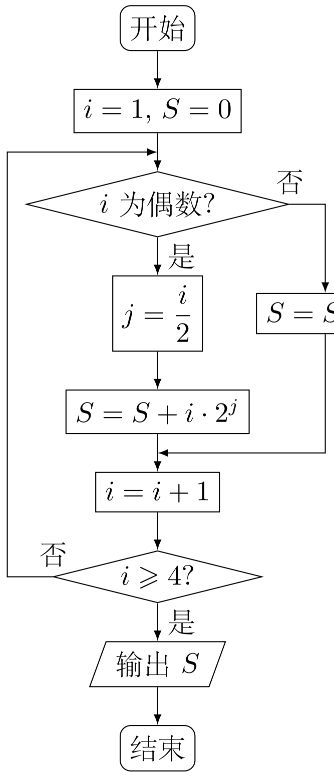
(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6

3. 设 $x\in\mathbf{R}$, 则"$x^2-5x<0$"是"$|x-1|<1$"的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

4. 阅读如图的程序框图, 运行相应的程序, 输出 S 的值为 ( )



(A) 5 (B) 8 (C) 24 (D) 29

5. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F, 准线为 l. 若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B, 且 $|AB|=4|OF|$ (O 为原点), 则双曲线的离心率为 ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

6. 已知 $a=\log_5 2$, $b=\log_{0.5} 0.2$, $c=0.5^{0.2}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ( )

(A) $a<c<b$ (B) $a<b<c$ (C) $b<c<a$ (D) $c<a<b$

7. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\pi)$ 是奇函数, 将 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 所得图象对应的函数为 $g(x)$. 若 $g(x)$ 的最小正周期为 2π, 且 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, 则 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=$ ( )

(A) -2 (B) $-\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

8. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a, & x\leqslant 1,\\ x-a\ln x, & x>1,\end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则 a 的取值范围为 ( )

(A) $[0,1]$ (B) $[0,2]$ (C) $[0,\mathrm{e}]$ (D) $[1,\mathrm{e}]$

二、填空题

9. i 是虚数单位, 则 $\left|\frac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$ 的值为______.

10. $\left(2x-\frac{1}{8x^3}\right)^8$ 的展开式中的常数项为______.

11. 已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形, 侧棱长均为 $\sqrt{5}$. 若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点, 另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心, 则该圆柱的体积为______.

12. 设 $a\in\mathbf{R}$, 直线 $ax-y+2=0$ 和圆 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta,\end{cases}$ (θ 为参数) 相切, 则 a 的值为______.

13. 设 $x>0$, $y>0$, $x+2y=5$, 则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为______.

14. 在四边形 $ABCD$ 中, $AD\parallel BC$, $AB=2\sqrt{3}$, $AD=5$, $\angle A=30^\circ$, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 且 $AE=BE$, 则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$______.

三、解答题

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c. 已知 $b+c=2a$, $3c\sin B=4a\sin C$.

(1) 求 $\cos B$ 的值;

(2) 求 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

16. 设甲、乙两位同学上学期间, 每天 7 : 30 之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$. 假定甲、乙两位同学到校情况互不影响, 且任一同学每天到校情况相互独立.

(1) 用 X 表示甲同学上学期间的三天中 7 : 30 之前到校的天数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;

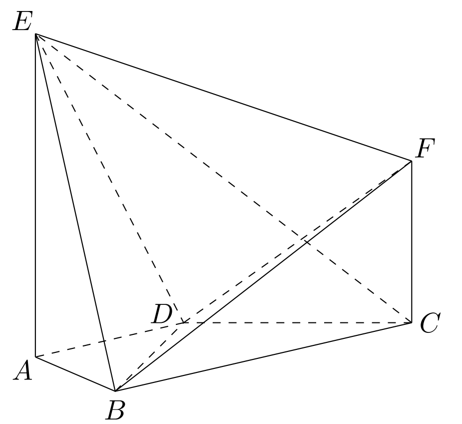
(2) 设 M 为事件"上学期间的三天中, 甲同学在 7 : 30 之前到校的天数比乙同学在 7 : 30 之前到校的天数恰好多 2", 求事件 M 发生的概率.

17. 如图, $AE\perp$ 平面 $ABCD$, $CF\parallel AE$, $AD\parallel BC$, $AD\perp AB$, $AB=AD=1$, $AE=BC=2$.

(1) 求证: $BF\parallel$ 平面 ADE;

(2) 求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值;

(3) 若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 求线段 CF 的长.



18. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为 F, 上顶点为 B. 已知椭圆的短轴长为 4, 离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设点 P 在椭圆上, 且异于椭圆的上、下顶点, 点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点, 点 N 在 y 轴的负半轴上. 若 $|ON|=|OF|$ (O 为原点), 且 $OP\perp MN$, 求直线 PB 的斜率.

19. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列. 已知 $a_1=4$, $b_1=6$, $b_2=2a_2-2$, $b_3=2a_3+4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1=1$, $c_n=\begin{cases}1, & 2^k<n<2^{k+1},\\ b_k, & n=2^k,\end{cases}$ 其中 $k\in\mathbf{N}^*$.

① 求数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n}-1)\}$ 的通项公式;

② 求 $\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_ic_i\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

20. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时, 证明 $f(x)+g(x)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\geqslant 0$;

(3) 设 x_n 为函数 $u(x)=f(x)-1$ 在区间 $\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{4},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的零点, 其中 $n\in\mathbf{N}$, 证明 $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}-x_n<\dfrac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}$.