2020 普通高等学校招生考试 (上海卷)

一、选择题

1. 若集合 $A=\{1,\ 2,\ 4\}$, $B=\{2,\ 4,\ 5\}$, 则 $A\cap B=$______.

2. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n-1}=$______.

3. 若复数 $z=1-2\mathrm{i}$ (其中 i 为虚数单位), 则 $|z|=$______.

4. 函数 $f(x)=x^3$ 的反函数为______.

5. 若实数 x, y 满足 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0,\\ x+2y-3\leqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=y-2x$ 的最大值为______.

6. 设 $a, b, c, d\in\mathbf{R}$, 若行列式 $\begin{vmatrix}1 & a & b\\ 2 & c & d\\ 3 & 0 & 0\end{vmatrix}=6$, 则行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=$______.

7. 设 $a,\ b\ \in\ \mathbf{R}$, 若 1, 2, a, b 这四个数的中位数为 3, 平均数为 4, 则 $ab=$______.

8. 已知公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n, 若 $a_1+a_{10}=a_9$, 则 $\dfrac{S_9}{a_{10}}=$______.

9. 从 6 人中选出 4 人去值班, 每人值班一天, 若第一天安排 1 人, 第二天安排 1 人, 第三天安排 2 人, 则不同安排方法的种数为______. (结果用数值表示)

10. 已知椭圆 $\varGamma$: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F, 点 P 位于第二象限且在 $\varGamma$ 上, 联结 PF 并延长, 交 $\varGamma$ 于点 $Q(x_Q, y_Q)$, 点 $Q'(x_{Q'}, y_{Q'})$ 也在 $\varGamma$ 上, 且 $y_Q+y_{Q'}=0$. 若 $FQ'\perp FP$, 则直线 PQ 的方程为______.

11. 设 $a\in\mathbf{R}$, 若存在定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 既满足"对任意 $x_0\in\mathbf{R}$, $f(x_0)$ 的值为 x_0^2 或 x_0"又满足"关于 x 的方程 $f(x)=a$ 无实数解", 则 a 取值范围是______.

12. 已知 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k$ 是平面内两两互不相等的向量, 若 $|\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2|=1$, 且 $|\boldsymbol{a}_i-\boldsymbol{b}_j|\in\{1,\ 2\}$ (其中 $i=1,\ 2$, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$), 则 k 最大值为______.

二、选择题

13. 若 $a, b\in\mathbf{R}$, 则下列不等式中, 恒成立的是 ( )

(A) $a^2+b^2\leqslant 2ab$ (B) $a^2+b^2\geqslant -2ab$

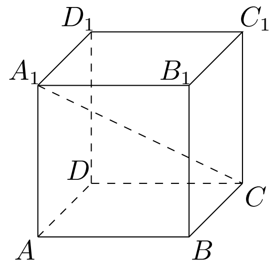
(C) $a+b\geqslant 2\sqrt{|ab|}$ (D) $a+b\geqslant -2\sqrt{|ab|}$

14. 直线 $3x+4y+1=0$ 的一个参数方程可以为 ( )

(A) $\begin{cases}x=1+3t,\\ y=-1+4t,\end{cases}$ (t 为参数) (B) $\begin{cases}x=1-3t,\\ y=-1+4t,\end{cases}$ (t 为参数)

(C) $\begin{cases}x=1-4t,\\ y=-1-3t,\end{cases}$ (t 为参数) (D) $\begin{cases}x=1+4t,\\ y=-1-3t,\end{cases}$ (t 为参数)

15. 在如图所示的棱长为 10 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 一条平行于 A_1C 的直线与正方体的表面交于 P, Q 两点, 其中 P 在侧面 ADD_1A_1 上, 且到 A_1D_1 的距离为 3, 到 AA_1 的距离为 2, 则点 Q 所在的面是 ( )



(A) $ABCD$ (B) ABB_1A_1 (C) BCC_1B_1 (D) CDD_1C_1

16. 对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$, 考察以下性质:

p: 存在非零实数 a, 使得 $f(x+a)<f(x)+f(a)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立;

q_1: $y=f(x)$ 单调递减, 且 $f(x)$ 恒大于 0;

q_2: $y=f(x)$ 单调递增, 且存在 $x_0<0$, 使得 $f(x_0)=0$.

关于上述性质, 以下判断正确的是 ( )

(A) q_1, q_2 都是 p 的充分条件 (B) q_1, q_2 中仅 q_1 是 p 的充分条件

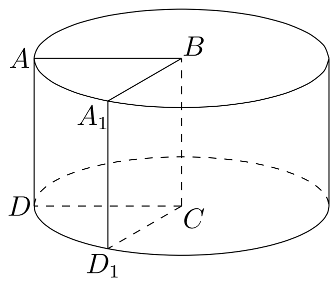
(C) q_1, q_2 中仅 q_2 是 p 的充分条件 (D) q_1, q_2 都不是 p 的充分条件

三、解答题

17. 如图所示, 边长为 1 的正方形 $ABCD$ 绕 BC 边旋转后形成一个圆柱.

(1) 求该圆柱表面积 S;

(2) 正方形 $ABCD$ 绕 BC 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 到 A_1BCD_1, 求 AD_1 与平面 $ABCD$ 所成角的大小. (结果用反三角函数值表示)



18. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x$ $(\omega>0)$.

(1) 若函数 $y=f(x)$ 的周期为 4π, 求 ω 及此时 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 的解集;

(2) 若 $\omega=1$, 设 $g(x)=f^2(x)+\sqrt{3}f(-x)\cdot f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, 求函数 $y=g(x)$ 值域.

19. 在研究某市交通情况时, 道路密度是指该路段上一定时间内通过的车辆数量除以时间, 车辆密度是指该路段一定时间内通过的车辆数除以该路段的长度. 现定义交通流量为 $v=\dfrac{q}{x}$, 其中 x 为道路密度, q 为车辆密度. 据调查某路段的交通流量有如下规律: $v=\begin{cases}100-135\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{80}{x}}, & 0<x<40, \\ -k(x-40)+85, & 40 \leqslant x \leqslant 80,\end{cases}$ (其中 $k>0$).

(1) 当交通流量大于 95 时, 求道路密度 x 的取值范围;

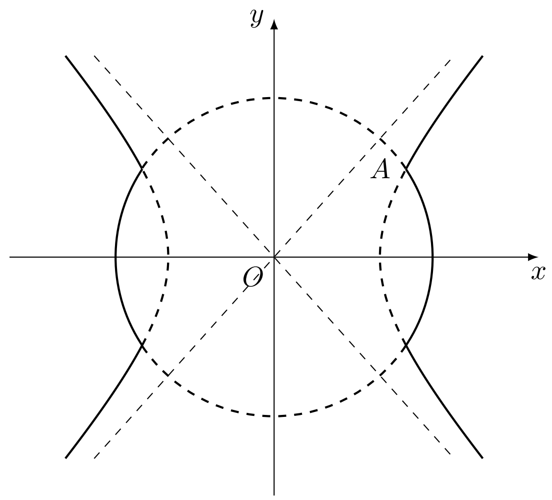
(2) 若道路密度 $x=80$ 时, 测得交通流量 $v=50$, 求车辆密度 q 的最大值.

20. 设 $b>0$. 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(x_A, y_A)$ 是双曲线 C_1: $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 和圆 C_2: $x^2+y^2=4+b^2$ 在第一象限内的交点, 曲线 $\mathit{\Gamma}$ 由 C_1 中满足 $|x| \geqslant x_A$ 的部分和 C_2 中满足 $|x| \geqslant x_A$ 的部分构成.

(1) 若 $x_A=\sqrt{6}$, 求 b 的值;

(2) 若 $b=\sqrt{5}$, F_1, F_2 分别为 $\mathit{\Gamma}$ 与 x 轴的左、右两个交点, 第一象限内的点 P 也在 $\mathit{\Gamma}$ 上, 且 $|PF_1|=8$, 求 $\angle F_1PF_2$ 的大小;

(3) 过点 $S\left(0, \dfrac{b^2}{2}+2\right)$ 作斜率为 $-\dfrac{b}{2}$ 的直线 l. 若 l 与 $\mathit{\Gamma}$ 恰有两个不同的公共点, 记为 M、N, 用 b 表示 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$, 并求当 b 变化时, $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 的取值范围.



21. 对于至少有三项的有穷实数数列 $\{a_n\}$, 若 $|a_2-a_1| \leqslant |a_3-a_1| \leqslant \cdots \leqslant |a_m-a_1|$ (其中 m 为 $\{a_n\}$ 的项数), 则称具有性质 P.

(1) 分别判断数列 3, 2, 5, 1 与数列 4, 3, 2, 5, 1 是否具有性质 P, 并说明理由;

(2) 已知首项为 1, 公比为 q, 项数为 10 的等比数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P, 求 q 的取值范围;

(3) 给定正整数 $m \geqslant 4$. 设数列 $\{a_n\}$ 是 1, 2, $\cdots$, m 的一个排列, 项数为 $m-1$ 的数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_k=a_{k-1}$ $(k=1, 2, \cdots, m-1)$, 且 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都具有性质 P, 求所有满足条件的数列 $\{a_n\}$.