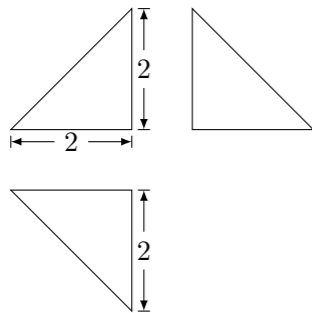


## 2020 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 文)

### 一、选择题

1. 已知集合  $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$ ,  $B = \{x \mid 3 < x < 15\}$ , 则  $A \cap B$  中元素的个数为 ( )  
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
2. 若  $\bar{z}(1+i) = 1-i$ , 则  $z =$  ( )  
(A)  $1-i$  (B)  $1+i$  (C)  $-i$  (D)  $i$
3. 设一组样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的方差为 0.01, 则数据  $10x_1, 10x_2, \dots, 10x_n$  的方差为 ( )  
(A) 0.01 (B) 0.1 (C) 1 (D) 10
4. Logistic 模型是常用数学模型之一, 可应用于流行病学领域. 有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数  $I(t)$  ( $t$  的单位: 天) 的 Logistic 模型:  $I(t) = \frac{K}{1 + e^{-0.23(t-53)}}$ , 其中  $K$  为最大确诊病例数. 当  $I(t^*) = 0.95K$  时, 标志着已初步遏制疫情, 则  $t^*$  约为 ( $\ln 19 \approx 3$ ) ( )  
(A) 60 (B) 63 (C) 66 (D) 69
5. 已知  $\sin \theta + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ , 则  $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) =$  ( )  
(A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
6. 在平面内,  $A, B$  是两个定点,  $C$  是动点. 若  $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 1$ , 则点  $C$  的轨迹为 ( )  
(A) 圆 (B) 椭圆 (C) 抛物线 (D) 直线
7. 设  $O$  为坐标原点, 直线  $x = 2$  与抛物线  $C: y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 交于  $D, E$  两点. 若  $OD \perp OE$ , 则  $C$  的焦点坐标为 ( )  
(A)  $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$  (B)  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  (C)  $(1, 0)$  (D)  $(2, 0)$
8. 点  $(0, -1)$  到直线  $y = k(x+1)$  距离的最大值为 ( )  
(A) 1 (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\sqrt{3}$  (D) 2
9. 下图为某几何体的三视图, 则该几何体的表面积是 ( )



- (A)  $6 + 4\sqrt{2}$  (B)  $4 + 4\sqrt{2}$  (C)  $6 + 2\sqrt{3}$  (D)  $4 + 2\sqrt{3}$

10. 设  $a = \log_3 2$ ,  $b = \log_5 3$ ,  $c = \frac{2}{3}$ , 则 ( )  
(A)  $a < c < b$  (B)  $a < b < c$  (C)  $b < c < a$  (D)  $c < a < b$
11. 在  $\triangle ABC$  中,  $\cos C = \frac{2}{3}$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 3$ , 则  $\tan B =$  ( )  
(A)  $\sqrt{5}$  (B)  $2\sqrt{5}$  (C)  $4\sqrt{5}$  (D)  $8\sqrt{5}$
12. 已知函数  $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ , 则 ( )  
(A)  $f(x)$  的最小值为 2  
(B)  $f(x)$  的图象关于  $y$  轴对称  
(C)  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \pi$  对称  
(D)  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{2}$  对称

### 二、填空题

13. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y \geq 0, \\ 2x - y \geq 0, \\ x \leq 1, \end{cases}$  则  $z = 3x + 2y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
14. 设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的一条渐近线为  $y = \sqrt{2}x$ , 则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.
15. 设函数  $f(x) = \frac{e^x}{x+a}$ . 若  $f'(1) = \frac{e}{4}$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.
16. 已知圆锥的底面半径为 1, 母线长为 3, 则该圆锥内半径最大的球的体积为\_\_\_\_\_.

### 三、解答题

17. 设等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 + a_2 = 4$ ,  $a_3 - a_1 = 8$ .  
(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;  
(2) 记  $S_n$  为数列  $\{\log_3 a_n\}$  的前  $n$  项和. 若  $S_m + S_{m+1} = S_{m+3}$ , 求  $m$ .

18. 某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次, 整理数据得到下表 (单位: 天):

空气质量等级 \ 锻炼人次	锻炼人次		
	[0, 200]	(200, 400]	(400, 600]
1 (优)	2	16	25
2 (良)	5	10	12
3 (轻度污染)	6	7	8
4 (中度污染)	7	2	0

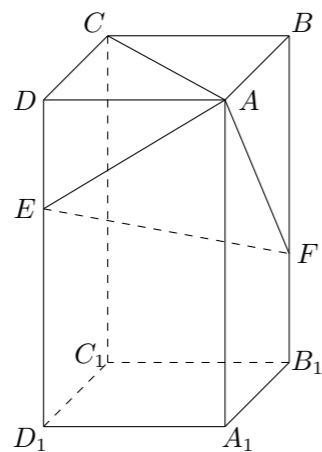
- (1) 分别估计该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率;
- (2) 求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表);
- (3) 若某天的空气质量等级为 1 或 2, 则称这天“空气质量好”; 若某天的空气质量等级为 3 或 4, 则称这天“空气质量不好”. 根据所给数据, 完成下面的  $2 \times 2$  列联表, 并根据列联表, 判断是否有 95% 的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

	人次 $\leq 400$	人次 $> 400$
空气质量好		
空气质量不好		

附:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ,

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

19. 如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $E, F$  分别在棱  $DD_1, BB_1$  上, 且  $2DE = ED_1, BF = 2FB_1$ . 证明:
- (1) 当  $AB = BC$  时,  $EF \perp AC$ ;
  - (2) 点  $C_1$  在平面  $AEF$  内.



21. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{m^2} = 1$  ( $0 < m < 5$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ,  $A, B$  分别为  $C$  的左、右顶点.
- (1) 求  $C$  的方程;
  - (2) 若点  $P$  在  $C$  上, 点  $Q$  在直线  $x = 6$  上, 且  $|BP| = |BQ|, BP \perp BQ$ , 求  $\triangle APQ$  的面积.

22. 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 2 - t - t^2, \\ y = 2 - 3t + t^2, \end{cases}$  ( $t$  为参数且  $t \neq 1$ ),  $C$  与坐标轴交于  $A, B$  两点.
- (1) 求  $|AB|$ ;
  - (2) 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求直线  $AB$  的极坐标方程.

20. 已知函数  $f(x) = x^3 - kx + k^2$ .
- (1) 讨论  $f(x)$  的单调性;
  - (2) 若  $f(x)$  有三个零点, 求  $k$  的取值范围.

23. 设  $a, b, c \in \mathbf{R}, a + b + c = 0, abc = 1$ .
- (1) 证明:  $ab + bc + ca < 0$ ;
  - (2) 用  $\max\{a, b, c\}$  表示  $a, b, c$  中的最大值, 证明:  $\max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}$ .