2020 普通高等学校招生考试 (全国卷 III 理)

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,\ y\in\mathbf{N}^*,\ y\geqslant x\}$, $B=\{(x,y)\mid x+y=8\}$, 则 $A\cap B$ 中元素的个数为 ( )

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 6

2. 复数 $\dfrac{1}{1-3\mathrm{i}}$ 的虚部是 ( )

(A) $-\dfrac{3}{10}$　(B) $-\dfrac{1}{10}$　(C) $\dfrac{1}{10}$　(D) $\dfrac{3}{10}$

3. 在一组样本数据中, 1, 2, 3, 4 出现的频率分别为 p_1, p_2, p_3, p_4, 且 $\sum\limits_{i=1}^{4}p_i=1$, 则下面四种情形中, 对应样本的标准差最大的一组是 ( )

(A) $p_1=p_4=0.1$, $p_2=p_3=0.4$　(B) $p_1=p_4=0.4$, $p_2=p_3=0.1$

(C) $p_1=p_4=0.2$, $p_2=p_3=0.3$　(D) $p_1=p_4=0.3$, $p_2=p_3=0.2$

4. Logistic 模型是常用数学模型之一, 可应用于流行病学领城. 有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$ (t 的单位: 天) 的 Logistic 模型: $I(t)=\dfrac{K}{1+\mathrm{e}^{-0.23(t-53)}}$, 其中 K 为最大确诊病例数. 当 $I(t^*)=0.95K$ 时, 标志着已初步遏制疫情, 则 t^* 约为 ($\ln 19\approx 3$) ( )

(A) 60　(B) 63　(C) 66　(D) 69

5. 设 O 为坐标原点, 直线 $x=2$ 与抛物线 C: $y^2=2px$ $(p>0)$ 交于 D, E 两点. 若 $OD\perp OE$, 则 C 的焦点坐标为 ( )

(A) $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$　(B) $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$　(C) $(1,0)$　(D) $(2,0)$

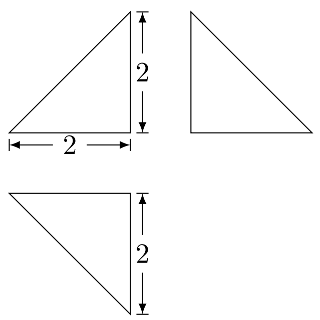
6. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=6$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$, 则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=$ ( )

(A) $-\dfrac{31}{35}$　(B) $-\dfrac{19}{35}$　(C) $\dfrac{17}{35}$　(D) $\dfrac{19}{35}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C=\dfrac{2}{3}$, $AC=4$, $BC=3$, 则 $\cos B=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{9}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

8. 下图为某几何体的三视图, 则该几何体的表面积是 ( )



(A) $6+4\sqrt{2}$　(B) $4+4\sqrt{2}$　(C) $6+2\sqrt{3}$　(D) $4+2\sqrt{3}$

9. 已知 $2\tan\theta-\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=7$, 则 $\tan\theta=$ ( )

(A) -2　(B) -1　(C) 1　(D) 2

10. 若直线 l 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $x^2+y^2=\dfrac{1}{5}$ 都相切, 则 l 的方程为 ( )

(A) $y=2x+1$　(B) $y=2x+\dfrac{1}{2}$　(C) $y=\dfrac{1}{2}x+1$　(D) $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

11. 设双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2, 离心率为 $\sqrt{5}$. P 是 C 上一点, 且 $F_1P\perp F_2P$. 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 4, 则 $a=$ ( )

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 8

12. 已知 $5^5<8^4$, $13^4<8^5$. 设 $a=\log_5 3$, $b=\log_8 5$, $c=\log_{13}8$, 则 ( )

(A) $a<b<c$　(B) $b<a<c$　(C) $b<c<a$　(D) $c<a<b$

二、填空题

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\ 2x-y\geqslant 0,\\ x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为______.

14. $\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项是______. (用数字作答)

15. 已知圆锥的底面半径为 1, 母线长为 3, 则该圆锥内半径最大的球的体积为______.

16. 关于函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题:

① $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称;
② $f(x)$ 的图象关于原点对称;
③ $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称;
④ $f(x)$ 的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是______.

三、解答题

17. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$, $a_{n+1}=3a_n-4n$.

(1) 计算 a_2, a_3, 猜想 $\{a_n\}$ 的通项公式并加以证明;
(2) 求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. 某学生兴趣小组随机调查了某市 100 天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次, 整理数据得到下表 (单位: 天):

空气质量等级 \ 锻炼人次	$[0,200]$	$(200,400]$	$(400,600]$
1 (优)	2	16	25
2 (良)	5	10	12
3 (轻度污染)	6	7	8
4 (中度污染)	7	2	0

(1) 分别估计该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率;
(2) 求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表);
(3) 若某天的空气质量等级为 1 或 2, 则称这天“空气质量好”; 若某天的空气质量等级为 3 或 4, 则称这天“空气质量不好”. 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表, 并根据列联表, 判断是否有 95% 的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关?

	人次 $\leqslant 400$	人次 >400
空气质量好		
空气质量不好		

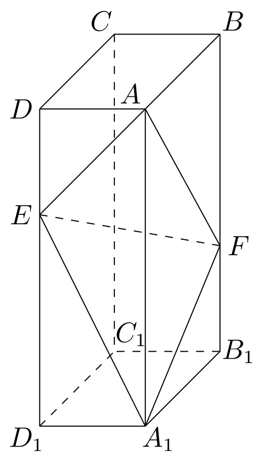
附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别在棱 DD_1, BB_1 上, 且 $2DE=ED_1$, $BF=2FB_1$.

(1) 证明: 点 C_1 在平面 AEF 内;

(2) 若 $AB=2$, $AD=1$, $AA_1=3$, 求二面角 $A-EF-A_1$ 的正弦值.



20. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1\ (0<m<5)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, A, B 分别为 C 的左、右顶点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若点 P 在 C 上, 点 Q 在直线 $x=6$ 上, 且 $|BP|=|BQ|$, $BP\perp BQ$, 求 $\triangle APQ$ 的面积.

21. 设函数 $f(x)=x^3+bx+c$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线与 y 轴垂直.

(1) 求 b;

(2) 若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点, 证明: $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2-t-t^2, \\ y=2-3t+t^2, \end{cases}$ (t 为参数且 $t\neq 1$), C 与坐标轴交于 A, B 两点.

(1) 求 $|AB|$;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求直线 AB 的极坐标方程.

23. 设 $a, b, c\in\mathbf{R}$, $a+b+c=0$, $abc=1$.

(1) 证明: $ab+bc+ca<0$;

(2) 用 $\max\{a,\ b,\ c\}$ 表示 a, b, c 中的最大值, 证明: $\max\{a,\ b,\ c\}\geqslant\sqrt[3]{4}$.