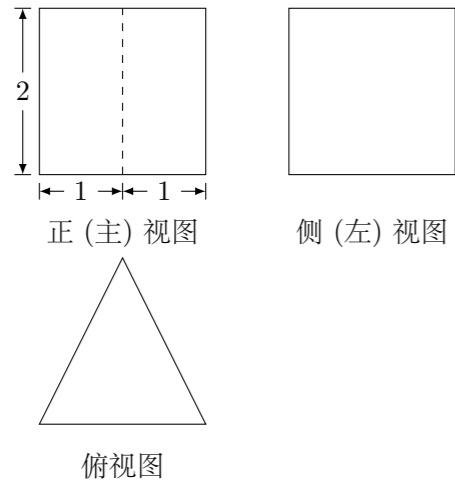


2020 普通高等学校招生考试 (北京卷)

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | 0 < x < 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 (A) $\{-1, 0, 1\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{-1, 1, 2\}$ (D) $\{1, 2\}$
2. 在复平面内, 复数 z 对应的点的坐标是 $(1, 2)$, 则 $i \cdot z =$ ()
 (A) $1 + 2i$ (B) $-2 + i$ (C) $1 - 2i$ (D) $-2 - i$
3. 在 $(\sqrt{x} - 2)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 ()
 (A) -5 (B) 5 (C) -10 (D) 10
4. 某三棱柱的底面为正三角形, 其三视图如图所示, 该三棱柱的表面积为 ()

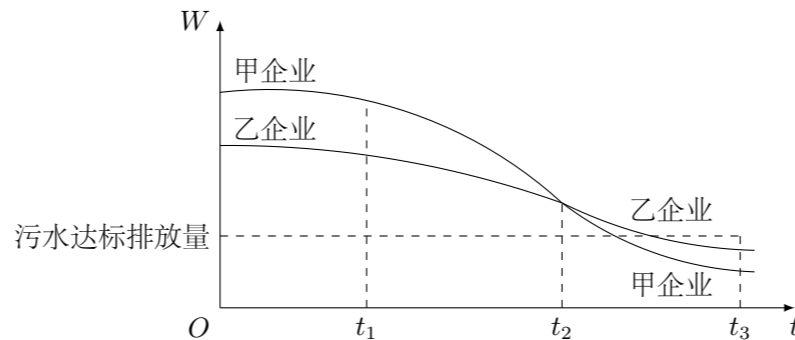


- (A) $6 + \sqrt{3}$ (B) $6 + 2\sqrt{3}$ (C) $12 + \sqrt{3}$ (D) $12 + 2\sqrt{3}$
5. 已知半径为 1 的圆经过点 $(3, 4)$, 则其圆心到原点的距离的最小值为 ()
 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7
 6. 已知函数 $f(x) = 2^x - x - 1$, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 ()
 (A) $(-1, 1)$ (B) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 (C) $(0, 1)$ (D) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
 7. 设抛物线的顶点为 O , 焦点为 F , 准线为 l . P 是抛物线上异于 O 的一点, 过 P 作 $PQ \perp l$ 于 Q , 则线段 FQ 的垂直平分线 ()
 (A) 经过点 O (B) 经过点 P
 (C) 平行于直线 OP (D) 垂直于直线 OP
 8. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -9$, $a_3 = -1$. 记 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 则数列 $\{T_n\}$ ()
 (A) 有最大项, 有最小项 (B) 有最大项, 无最小项
 (C) 无最大项, 有最小项 (D) 无最大项, 无最小项

9. 已知 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 则“存在 $k \in \mathbf{Z}$ 使得 $\alpha = k\pi + (-1)^k \beta$ ”是“ $\sin \alpha = \sin \beta$ ”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
10. 2020 年 3 月 14 日是全球首个国际圆周率日 (π Day). 历史上, 求圆周率 π 的方法有多种, 与中国传统数学中的“割圆术”相似. 数学家阿尔·卡西的方法是: 当正整数 n 充分大时, 计算单位圆的内接正 $6n$ 边形的周长和外切正 $6n$ 边形 (各边均与圆相切的正 $6n$ 边形) 的周长, 将它们的算术平均数作为 2π 的近似值. 按照阿尔·卡西的方法, π 的近似值的表达式是 ()
 (A) $3n \left(\sin \frac{30^\circ}{n} + \tan \frac{30^\circ}{n} \right)$ (B) $6n \left(\sin \frac{30^\circ}{n} + \tan \frac{30^\circ}{n} \right)$
 (C) $3n \left(\sin \frac{60^\circ}{n} + \tan \frac{60^\circ}{n} \right)$ (D) $6n \left(\sin \frac{60^\circ}{n} + \tan \frac{60^\circ}{n} \right)$

二、填空题

11. 函数 $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln x$ 的定义域是_____.
12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$, 则 C 的右焦点的坐标为_____; C 的焦点到其渐近线的距离是_____.
13. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 则 $|\overrightarrow{PD}| =$ _____; $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD} =$ _____.
14. 若函数 $f(x) = \sin(x + \varphi) + \cos x$ 的最大值为 2, 则常数 φ 的一个取值为_____.
15. 为满足人们对美好生活的向往, 环保部门要求相关企业加强污水治理, 排放未达标的企业要限期整改. 设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W = f(t)$, 用 $-\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 的大小评价在 $[a, b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱, 已知整改期内, 甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如图所示.

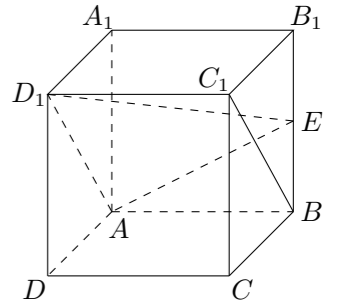


给出下列四个结论:

- ① 在 $[t_1, t_2]$ 这段时间内, 甲企业的污水治理能力比乙企业强;
 - ② 在 t_2 时刻, 甲企业的污水治理能力比乙企业强;
 - ③ 在 t_3 时刻, 甲、乙两企业的污水排放都已达标;
 - ④ 甲企业在 $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$ 这三段时间中, 在 $[0, t_1]$ 的污水治理能力最强.
- 其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题

16. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 BB_1 的中点.
 (1) 求证: $BC_1 \parallel$ 平面 AD_1E ;
 (2) 求直线 AA_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值.



17. 在 $\triangle ABC$ 中, $a + b = 11$, 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求:
 (1) a 的值;
 (2) $\sin C$ 和 $\triangle ABC$ 的面积.
 条件①: $c = 7$, $\cos A = -\frac{1}{7}$;
 条件②: $\cos A = \frac{1}{8}$, $\cos B = \frac{9}{16}$.

18. 某校为举办甲、乙两项不同活动, 分别设计了相应的活动方案: 方案一、方案二. 为了解该校学生对活动方案是否支持, 对学生进行简单随机抽样, 获得数据如下表:

	男生		女生	
	支持	不支持	支持	不支持
方案一	200 人	400 人	300 人	100 人
方案二	350 人	250 人	150 人	250 人

假设所有学生对活动方案是否支持相互独立.

- 分别估计该校男生支持方案一的概率、该校女生支持方案一的概率;
- 从该校全体男生中随机抽取 2 人, 全体女生中随机抽取 1 人, 估计这 3 人中恰有 2 人支持方案一的概率;
- 将该校学生支持方案的概率估计值记为 p_0 , 假设该校年级有 500 名男生和 300 名女生, 除一年级外其他年级学生支持方案二的概率估计值记为 p_1 , 试比较 p_0 与 p_1 的大小. (结论不要求证明)

19. 已知函数 $f(x) = 12 - x^2$.

- 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率等于 -2 的切线方程;
- 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(t, f(t))$ 处的切线与坐标轴围成的三角形的面积为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最小值.

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 $A(-2, -1)$, 且 $a = 2b$.

- 求椭圆 C 的方程;
- 过点 $B(-4, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M, N , 直线 MA, NA 分别交直线 $x = -4$ 于点 P, Q . 求 $\frac{|PB|}{|BQ|}$ 的值.

21. 已知 $\{a_n\}$ 是无穷数列. 给出两个性质:

- 对于 $\{a_n\}$ 中任意两项 a_i, a_j ($i > j$), 在 $\{a_n\}$ 中都存在一项 a_m , 使 $\frac{a_i^2}{a_j} = a_m$;
- 对于 $\{a_n\}$ 中任意项 a_n ($n \geq 3$), 在 $\{a_n\}$ 中都存在两项 a_k, a_l ($k > l$), 使得 $a_n = \frac{a_k^2}{a_l}$.

- 若 $a_n = n$ ($n = 1, 2, \dots$), 判断数列 $\{a_n\}$ 是否满足性质①, 说明理由;
- 若 $a_n = 2^{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$), 判断数列 $\{a_n\}$ 是否同时满足性质①和性质②, 说明理由;
- 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且同时满足性质①和性质②, 证明: $\{a_n\}$ 为等比数列.