2020 普通高等学校招生考试 (新高考 I)

一、单选题

1. 设集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x\mid 2<x<4\}$, 则 $A\cup B=$ ( )

   (A) $\{x\mid 2<x\leqslant 3\}$ (B) $\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$

   (C) $\{x\mid 1\leqslant x<4\}$ (D) $\{x\mid 1<x<4\}$

2. $\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=$ ( )

   (A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-\mathrm{i}$

3. 6 名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者, 每名同学只去 1 个场馆, 甲场馆安排 1 名, 乙场馆安排 2 名, 丙场馆安排 3 名, 则不同的安排方法共有( )

   (A) 120 种 (B) 90 种 (C) 60 种 (D) 30 种

4. 日晷是中国古代用来测定时间的仪器, 利用与晷面垂直的晷针投射到晷面的影子来测定时间. 把地球看成一个球 (球心记为 O), 地球上一点 A 的纬度是指 OA 与地球赤道所在平面所成角, 点 A 处的水平面是指过点 A 且与 OA 垂直的平面. 在点 A 处放置一个日晷, 若晷面与赤道所在平面平行, 点 A 处的纬度为北纬 $40°$, 则晷针与点 A 处的水平面所成角为 ( )

   (A) $20°$ (B) $40°$ (C) $50°$ (D) $90°$

5. 某中学的学生积极参加体育锻炼, 其中有 96% 的学生喜欢足球或游泳, 60% 的学生喜欢足球, 82% 的学生喜欢游泳, 则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 ( )

   (A) 62% (B) 56% (C) 46% (D) 42%

6. 基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数. 基本再生数指一个感染者传染的平均人数, 世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间. 在新冠肺炎疫情初始阶段, 可以用指数模型: $I(t)=\mathrm{e}^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t (单位: 天) 的变化规律, 指数增长率 r 与 R_0, T 近似满足 $R_0=1+rT$. 有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$, $T=6$. 据此, 在新冠肺炎疫情初始阶段, 累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为 $(\ln 2\approx 0.69)$ ( )

   (A) 1.2 天 (B) 1.8 天 (C) 2.5 天 (D) 3.5 天

7. 已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点, 则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 ( )

   (A) $(-2,6)$ (B) $(-6,2)$ (C) $(-2,4)$ (D) $(-4,6)$

8. 若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减, 且 $f(2)=0$, 则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是 ( )

   (A) $[-1,1]\cup[3,+\infty)$ (B) $[-3,-1]\cup[0,1]$

   (C) $[-1,0]\cup[1,+\infty)$ (D) $[-1,0]\cup[1,3]$

二、多选题

9. 已知曲线 C: $mx^2+ny^2=1$ ( )

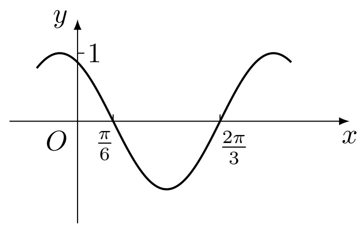
   (A) 若 $m>n>0$, 则 C 是椭圆, 其焦点在 y 轴上

   (B) 若 $m=n>0$, 则 C 是圆, 其半径为 $\sqrt{n}$

   (C) 若 $mn<0$, 则 C 是双曲线, 其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\dfrac{m}{n}}x$

   (D) 若 $m=0$, $n>0$, 则 C 是两条直线

10. 下图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象, 则 $\sin(\omega x+\varphi)=$ ( )



   (A) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ (B) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$

   (C) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ (D) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-2x\right)$

11. 已知 $a>0$, $b>0$, 且 $a+b=1$, 则 ( )

   (A) $a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}$ (B) $2^{a-b}>\dfrac{1}{2}$

   (C) $\log_2 a+\log_2 b\geqslant -2$ (D) $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

12. 信息熵是信息论中的一个重要概念. 设随机变量 X 所有可能的取值为 1, 2, $\cdots$, n, 且 $P(X=i)=p_i>0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$, 定义 X 的信息熵 $H(X)=-\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$. ( )

   (A) 若 $n=1$, 则 $H(X)=0$

   (B) 若 $n=2$, 则 $H(X)$ 随着 p_1 的增大而增大

   (C) 若 $p_i=\dfrac{1}{n}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 则 $H(X)$ 随着 n 的增大而增大

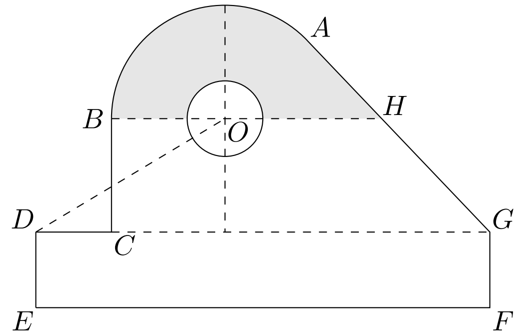
   (D) 若 $n=2m$, 随机变量 Y 所有可能的取值为 1, 2, $\cdots$, m, 且 $P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$, 则 $H(X)\leqslant H(Y)$

三、填空题

13. 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点, 且与 C 交于 A, B 两点, 则 $|AB|=$______.

14. 将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为______.

15. 某中学开展劳动实习, 学生加工制作零件, 零件的截面如图所示. O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心, A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点, B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点, 四边形 $DEFG$ 为矩形, $BC\perp DG$, 垂足为 C, $\tan\angle ODC=\dfrac{3}{5}$, $BH\,/\!/\,DG$, $EF=12$ cm, $DE=2$ cm, A 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7 cm, 圆孔半径为 1 cm, 则图中阴影部分的面积为______cm^2.



16. 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2, $\angle BAD=60°$. 以 D_1 为球心, $\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为______.

四、解答题

17. 在① $ac=\sqrt{3}$, ② $c\sin A=3$, ③ $c=\sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 c 的值; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.

   问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $\sin A=\sqrt{3}\sin B$, $C=\dfrac{\pi}{6}$, ______?

18. 已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_4=20$, $a_3=8$.

   (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

   (2) 记 b_m 为 $\{a_n\}$ 在区间 $(0,m]$ $(m\in\mathbf{N}^*)$ 中的项的个数, 求数列 $\{b_m\}$ 的前 100 项和 S_{100}.

19. 为加强环境保护, 治理空气污染, 环境监测部门对某市空气质量进行调研, 随机抽查了 100 天空气中的 PM2.5 和 SO_2 浓度 (单位: $\mu g/m^3$), 得下表:

PM2.5 \ SO_2	$[0,50]$	$(50,150]$	$(150,475]$
$[0,35]$	32	18	4
$(35,75]$	6	8	12
$(75,115]$	3	7	10

(1) 估计事件"该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 75, 且 SO_2 浓度不超过 150"的概率;

(2) 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表:

PM2.5 \ SO_2	$[0,150]$	$(150,475]$
$[0,75]$		
$(75,115]$		

(3) 根据 (2) 中的列联表, 判断是否有 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO_2 浓度有关?

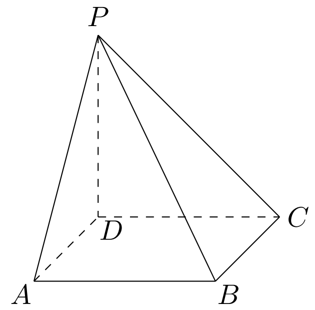
附: $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

20. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$. 设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l.

(1) 证明: $l\perp$ 平面 PDC;

(2) 已知 $PD=AD=1$, Q 为 l 上的点, 求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.



21. 已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$.

(1) 当 $a=\mathrm{e}$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2) 若 $f(x)\geqslant 1$, 求 a 的取值范围.

22. 已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $A(2,1)$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 点 M, N 在 C 上, 且 $AM\perp AN$, $AD\perp MN$, D 为垂足. 证明: 存在定点 Q, 使得 $|DQ|$ 为定值.