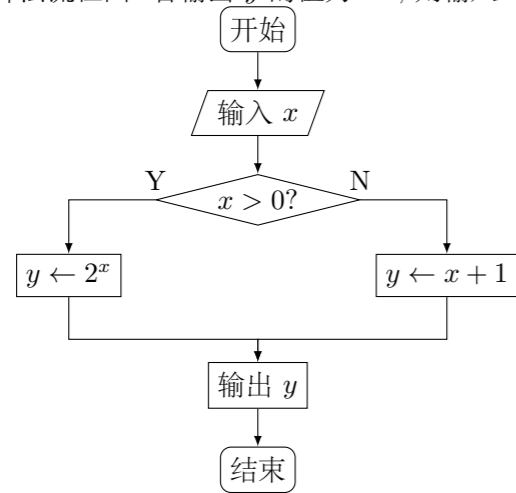


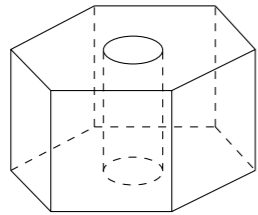
2020 普通高等学校招生考试 (江苏卷)

一、填空题

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
2. 已知 i 是虚数单位, 则复数 $z = (1+i)(2-i)$ 的实部是_____.
3. 已知一组数据 $4, 2a, 3-a, 5, 6$ 的平均数为 4 , 则 a 的值是_____.
4. 将一颗质地均匀的正方体骰子先后抛掷 2 次, 观察向上的点数, 则点数和为 5 的概率是_____.
5. 如图是一个算法流程图. 若输出 y 的值为 -2 , 则输入 x 的值是_____.



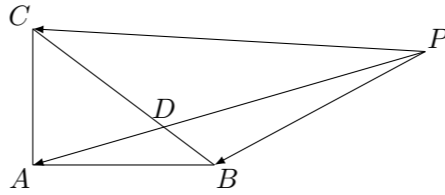
6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1$ ($a > 0$) 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, 则该双曲线的离心率是_____.
7. 已知 $y = f(x)$ 是奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, 则 $f(-8)$ 的值是_____.
8. 已知 $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{2}{3}$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值是_____.
9. 如图, 六角螺帽毛坯是由一个正六棱柱挖去一个圆柱所构成的. 已知螺帽的底面正六边形边长为 2 cm, 高为 2 cm, 内孔半径为 0.5 cm, 则此六角螺帽毛坯的体积是_____ cm^3 .



10. 将函数 $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 则平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是_____.
11. 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列. 已知数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - n + 2^n - 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 则 $d + q$ 的值是_____.

12. 已知 $5x^2y^2 + y^4 = 1$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是_____.

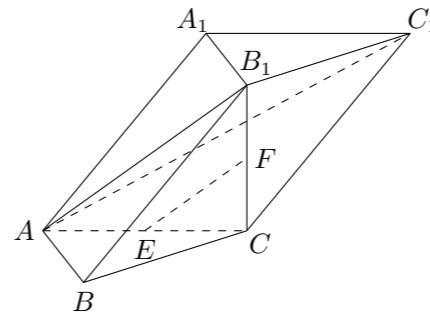
13. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4$, $AC = 3$, $\angle BAC = 90^\circ$, D 在边 BC 上, 延长 AD 到 P , 使得 $AP = 9$, 若 $\vec{PA} = m\vec{PB} + \left(\frac{3}{2} - m\right)\vec{PC}$ (m 为常数), 则 CD 的长度是_____.



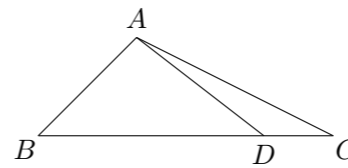
14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, A, B 是圆 $C: x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 36$ 上的两个动点, 满足 $PA = PB$, 则 $\triangle PAB$ 面积的最大值是_____.

二、解答题

15. 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC$, $B_1C \perp$ 平面 ABC , E, F 分别是 AC, B_1C 的中点.
- (1) 求证: $EF \parallel$ 平面 AB_1C_1 ;
 - (2) 求证: 平面 $AB_1C \perp$ 平面 ABB_1 .

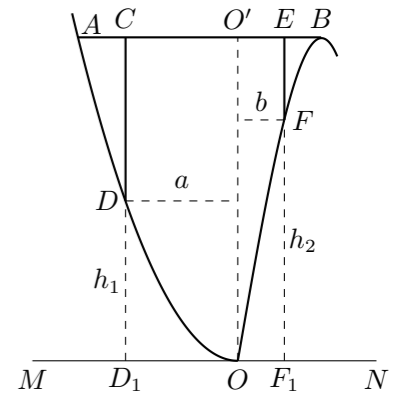


16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a = 3$, $c = \sqrt{2}$, $B = 45^\circ$.
- (1) 求 $\sin C$ 的值;
 - (2) 在边 BC 上取一点 D , 使得 $\cos \angle ADC = -\frac{4}{5}$, 求 $\tan \angle DAC$ 的值.



17. 某地准备在山谷中建一座桥梁, 桥址位置的竖直面图如图所示: 谷底 O 在水平线 MN 上, 桥 AB 与 MN 平行, OO' 为铅垂线 (O' 在 AB 上). 经测量, 左侧曲线 AO 上任一点 D 到 MN 的距离 h_1 (米) 与 D 到 OO' 的距离 a (米) 之间满足关系式 $h_1 = \frac{1}{40}a^2$; 右侧曲线 BO 上任一点 F 到 MN 的距离 h_2 (米) 与 F 到 OO' 的距离 b (米) 之间满足关系式 $h_2 = -\frac{1}{800}b^3 + 6b$. 已知点 B 到 OO' 的距离为 40 米.

- (1) 求桥 AB 的长度;
- (2) 计划在谷底两侧建造平行于 OO' 的桥墩 CD 和 EF , 且 CE 为 80 米, 其中 C, E 在 AB 上 (不包括端点). 桥墩 EF 每米造价 k (万元), 桥墩 CD 每米造价 $\frac{3}{2}k$ (万元) ($k > 0$). 问 $O'E$ 为多少米时, 桥墩 CD 与 EF 的总造价最低?



18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 A 在椭圆 E 上且在第一象限内, $AF_2 \perp F_1F_2$, 直线 AF_1 与椭圆 E 相交于另一点 B .
- (1) 求 $\triangle AF_1F_2$ 的周长;
 - (2) 在 x 轴上任取一点 P , 直线 AP 与椭圆 E 的右准线相交于点 Q , 求 $\vec{OP} \cdot \vec{QP}$ 的最小值;
 - (3) 设点 M 在椭圆 E 上, 记 $\triangle OAB$ 与 $\triangle MAB$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 若 $S_2 = 3S_1$, 求点 M 的坐标.

19. 已知关于 x 的函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 与 $h(x) = kx + b$ ($k, b \in \mathbf{R}$) 在区间 D 上恒有 $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$.
- (1) 若 $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = -x^2 + 2x$, $D = (-\infty, +\infty)$, 求 $h(x)$ 的表达式;
- (2) 若 $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = k \ln x$, $h(x) = kx - k$, $D = (0, +\infty)$, 求 k 的取值范围;
- (3) 若 $f(x) = x^4 - 2x^2$, $g(x) = 4x^2 - 8$, $h(x) = 4(t^3 - t)x - 3t^4 + 2t^2$ ($0 < |t| \leq \sqrt{2}$), $D = [m, n] \subseteq [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 求证: $n - m \leq \sqrt{7}$.

21. 三选二.

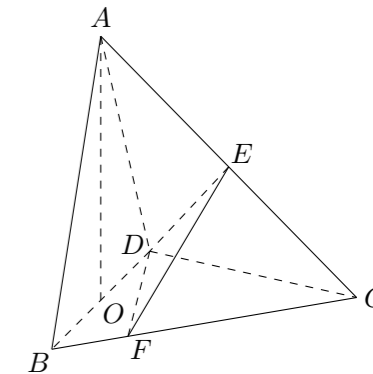
- 【A】** 平面上点 $A(2, -1)$ 在矩阵 $M = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{bmatrix}$ 对应的变换作用下得到点 $B(3, -4)$.
- (1) 求实数 a, b 的值;
- (2) 求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1} .

- 【B】** 在极坐标系中, 已知点 $A\left(\rho_1, \frac{\pi}{3}\right)$ 在直线 $l: \rho \cos \theta = 2$ 上, 点 $B\left(\rho_2, \frac{\pi}{6}\right)$ 在圆 $C: \rho = 4 \sin \theta$ 上 (其中 $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$).
- (1) 求 ρ_1, ρ_2 的值;
- (2) 求出直线 l 与圆 C 的公共点的极坐标.

- 【C】** 设 $x \in \mathbf{R}$, 解不等式 $2|x + 1| + |x| \leq 4$.

20. 已知数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的首项 $a_1 = 1$, 前 n 项和为 S_n . 设 λ 与 k 是常数, 若对一切正整数 n , 均有 $S_{n+1}^{\frac{1}{k}} - S_n^{\frac{1}{k}} = \lambda a_{n+1}^{\frac{1}{k}}$ 成立, 则称此数列为“ $\lambda \sim k$ ”数列.
- (1) 若等差数列 $\{a_n\}$ 是“ $\lambda \sim 1$ ”数列, 求 λ 的值;
- (2) 若数列 $\{a_n\}$ 是“ $\frac{\sqrt{3}}{3} \sim 2$ ”数列, 且 $a_n > 0$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 对于给定的 λ , 是否存在三个不同的数列 $\{a_n\}$ 为“ $\lambda \sim 3$ ”数列, 且 $a_n \geq 0$? 若存在, 求 λ 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

22. 在三棱锥 $A - BCD$ 中, 已知 $CB = CD = \sqrt{5}$, $BD = 2$, O 为 BD 的中点, $AO \perp$ 平面 BCD , $AO = 2$, E 为 AC 的中点.
- (1) 求直线 AB 与 DE 所成角的余弦值;
- (2) 若点 F 在 BC 上, 满足 $BF = \frac{1}{4}BC$, 设二面角 $F - DE - C$ 的大小为 θ , 求 $\sin \theta$ 的值.



23. 甲口袋中装有 2 个黑球和 1 个白球, 乙口袋中装有 3 个白球. 现从甲、乙两口袋中各任取一个球交换放入另一口袋, 重复 n 次这样的操作, 记甲口袋中黑球个数为 X_n , 恰有 2 个黑球的概率为 p_n , 恰有 1 个黑球的概率为 q_n .
- (1) 求 p_1, q_1 和 p_2, q_2 ;
- (2) 求 $2p_n + q_n$ 与 $2p_{n-1} + q_{n-1}$ 的递推关系式和 X_n 的数学期望 $E(X_n)$ (用 n 表示).