2020 普通高等学校招生考试 (浙江卷)

一、填空题

1. 已知集合 $P=\{x\mid 1<x<4\}$, $Q=\{x\mid 2<x<3\}$, 则 $P\cap Q=$ ( )

   (A) $\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$ (B) $\{x\mid 2<x<3\}$

   (C) $\{x\mid 3\leqslant x<4\}$ (D) $\{x\mid 1<x<4\}$

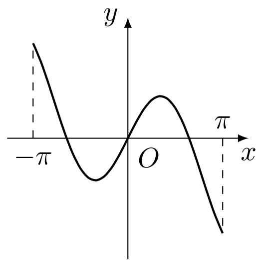
2. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 若 $a-1+(a-2)\,\mathrm{i}$ (i 为虚数单位) 是实数, 则 $a=$ ( )

   (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

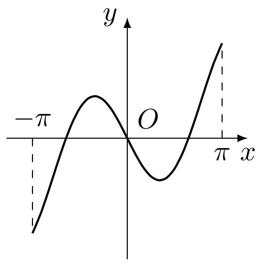
3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x-3y+1\leqslant 0,\\ x+y-3\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的取值范围是 ( )

   (A) $(-\infty,4]$ (B) $[4,+\infty)$ (C) $[5,+\infty)$ (D) $(-\infty,+\infty)$

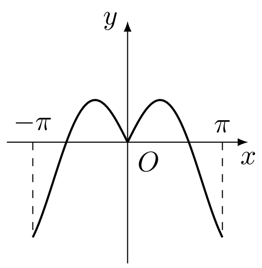
4. 函数 $y=x\cos x+\sin x$ 在区间 $[-\pi,+\pi]$ 的图象大致为 ( )



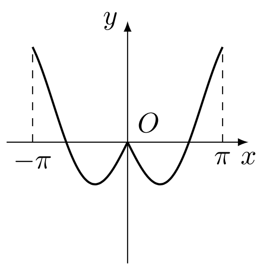
(A)



(B)

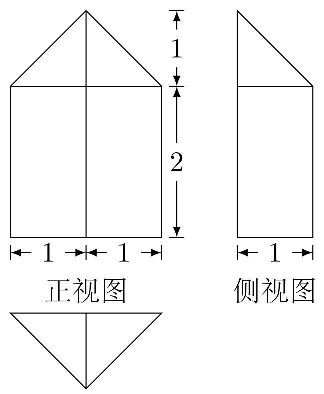


(C)



(D)

5. 某几何体的三视图 (单位: cm) 如图所示, 则该几何体的体积 (单位: cm^3) 是 ( )



正视图 侧视图

俯视图

   (A) $\dfrac{7}{3}$ (B) $\dfrac{14}{3}$ (C) 3 (D) 6

6. 已知空间中不过同一点的三条直线 m, n, l, 则"m, n, l 在同一平面"是"m, n, l 两两相交"的 ( )

   (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

   (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n, 公差 $d\neq 0$, $\dfrac{a_1}{d}\leqslant 1$. 记 $b_1=S_2$, $b_{n+1}=S_{2n+2}-S_{2n}$, $n\in\mathbf{N}^*$, 下列等式不可能成立的是 ( )

   (A) $2a_4=a_2+a_6$ (B) $2b_4=b_2+b_6$

   (C) $a_4^2=a_2a_8$ (D) $b_4^2=b_2b_8$

8. 已知点 $O(0,0)$, $A(-2,0)$, $B(2,0)$. 设点 P 满足 $|PA|-|PB|=2$, 且 P 为函数 $y=3\sqrt{4-x^2}$ 图象上的点, 则 $|OP|=$ ( )

   (A) $\dfrac{\sqrt{22}}{2}$ (B) $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $\sqrt{10}$

9. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $ab\neq 0$, 若 $(x-a)(x-b)(x-2a-b)\geqslant 0$ 在 $x\geqslant 0$ 上恒成立, 则 ( )

   (A) $a<0$ (B) $a>0$ (C) $b<0$ (D) $b>0$

10. 设集合 S, T, $S\subseteq\mathbf{N}^*$, $T\subseteq\mathbf{N}^*$, S, T 中至少有两个元素, 且 S, T 满足:
    ① 对于任意 $x,y\in S$, 若 $x\neq y$, 都有 $xy\in T$;
    ② 对于任意 $x,y\in T$, 若 $x<y$, 则 $\dfrac{y}{x}\in S$.
    下列命题正确的是 ( )

    (A) 若 S 有 4 个元素, 则 $S\cup T$ 有 7 个元素

    (B) 若 S 有 4 个元素, 则 $S\cup T$ 有 6 个元素

    (C) 若 S 有 3 个元素, 则 $S\cup T$ 有 4 个元素

    (D) 若 S 有 3 个元素, 则 $S\cup T$ 有 5 个元素

二、填空题

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, 则 $S_3=$______.

12. 设 $(1+2x)^5=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+a_5x^4+a_6x^5$, 则 $a_5=$______; $a_1+a_2+a_3=$______.

13. 已知 $\tan\theta=2$, 则 $\cos 2\theta=$______; $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=$______.

14. 已知圆锥展开图的侧面积为 2π, 且为半圆, 则底面半径为______.

15. 设直线 l: $y=kx+b$ $(k>0)$, 圆 C_1: $x^2+y^2=1$, $C_2:(x-4)^2+y^2=1$, 若直线 l 与 C_1, C_2 都相切, 则 $k=$______; $b=$______.

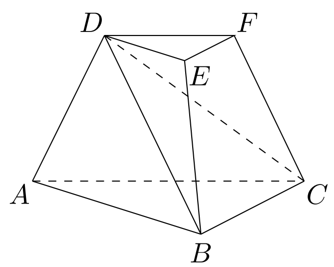
16. 一个盒子里有 1 个红 1 个绿 2 个黄四个相同的球, 每次拿一个, 不放回, 拿出红球即停, 设拿出黄球的个数为 ξ, 则 $P(\xi=0)=$______; $E(\xi)=$______.

17. 设 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 为单位向量, 满足 $|2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2|\leqslant\sqrt{2}$, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, 设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ, 则 $\cos^2\theta$ 的最小值为______.

三、解答题

18. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 且 $2b\sin A=\sqrt{3}a$.
    (1) 求角 B;
    (2) 求 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的取值范围.

19. 如图, 三棱台 $DEF-ABC$ 中, 面 $ADFC\perp$ 面 ABC, $\angle ACB=\angle ACD=45°$, $DC=2BC$.
    (1) 证明: $EF\perp DB$;
    (2) 求 DF 与面 DBC 所成角的正弦值.



20. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 中, $a_1=b_1=c_1=1$, $c_n=a_{n+1}-a_n$, $c_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_{n+2}}\cdot c_n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

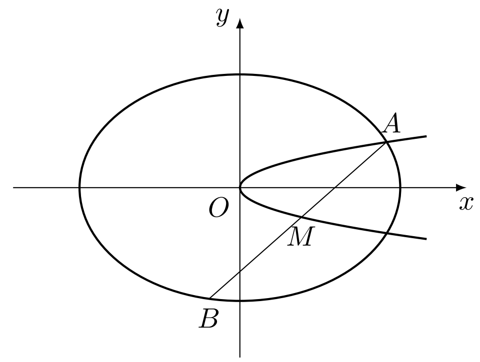
(1) 若数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 且公比 $q>0$, 且 $b_1+b_2=6b_3$, 求 q 与 a_n 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且公差 $d>0$, 证明: $c_1+c_2+\cdots+c_n<1+\dfrac{1}{d}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

21. 如图, 已知椭圆 C_1: $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$, 抛物线 C_2: $y^2=2px$ $(p>0)$, 点 A 是椭圆 C_1 与抛物线 C_2 的交点, 过点 A 的直线 l 交椭圆 C_1 于点 B, 交抛物线 C_2 于 M (B, M 不同于 A).

(1) 若 $p=\dfrac{1}{16}$, 求抛物线 C_2 的焦点坐标;

(2) 若存在不过原点的直线 l 使 M 为线段 AB 的中点, 求 p 的最大值.



22. 已知 $1<a\leqslant 2$, 函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-a$, 其中 $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 为自然对数的底数.

(1) 证明: 函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点;

(2) 记 x_0 为函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点, 证明:

① $\sqrt{a-1}\leqslant x_0\leqslant\sqrt{2(a-1)}$;

② $x_0f(\mathrm{e}^{x_0})\geqslant(\mathrm{e}-1)(a-1)a$.