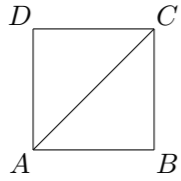


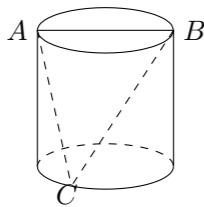
2021 普通高等学校招生考试 (上海卷)

一、填空题

- 若复数 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$ (i 为虚数单位), 则 $z_1 + z_2 =$ _____.
- 若集合 $A = \{x \mid 2x \leq 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
- 若圆为 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$, 则该圆的圆心坐标为_____.
- 如图所示, 若正方形 $ABCD$ 的边长为 3, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.



- 设 $f^{-1}(x)$ 为函数 $f(x) = \frac{3}{x} + 2$ 的反函数, 则 $f^{-1}(1) =$ _____.
- 在 $(x+a)^5$ 的二项展开式中, 若 x^2 的系数为 80, 则实数 $a =$ _____.
- 若实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 3, \\ 2x - y - 2 \geq 0, \\ 3x + y - 8 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = x - y$ 的最大值为_____.
- 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 满足 $a_1 = 3$, $b_n = a_{2n}$, 且 a_n 的各项和为 9, 则数列 $\{b_n\}$ 的各项和为_____.
- 如图所示, 已知圆柱的底面半径为 1, 高为 2, AB 为上底面圆的一条直径, 若 C 为下底面圆周上的一个动点, 则 $\triangle ABC$ 的面积取值范围为_____.

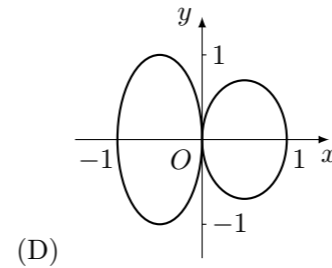
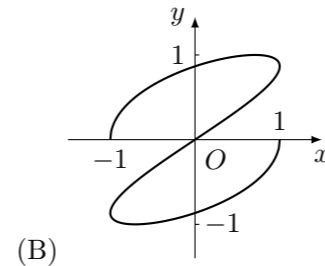
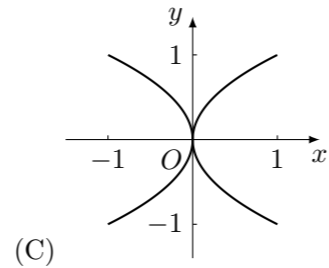
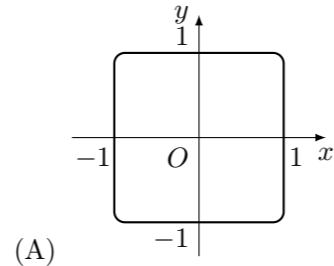


- 上海的花博会有 A, B, C, D 四个不同的场馆. 若甲、乙每人选 2 个场馆去参观, 则两人的选择中恰有一个场馆相同的概率为_____.
- 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , A, B 两点位于第一象限且在 C 上, 若 $|AF| = 2$, $|BF| = 4$, $|AB| = 3$, 则直线 AB 的斜率为_____.
- 已知 $a_i \in \mathbf{N}^*$ ($i = 1, 2, \dots, 9$), 若对任意的 $k \in \mathbf{N}^*$ ($2 \leq k \leq 8$), $a_k = a_{k-1} + 1$ 或 $a_k = a_{k+1} - 1$ 中有且仅有一个成立, 且 $a_1 = 6$, $a_9 = 9$, 则 $a_1 + \dots + a_9$ 的最小值为_____.

二、选择题

- 下列函数中, 既是奇函数又是减函数的是 ()
 (A) $y = -3x$ (B) $y = x^3$ (C) $y = \log_3 x$ (D) $y = 3^x$

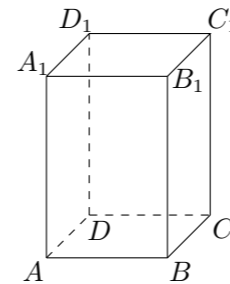
- 若参数方程 $\begin{cases} x = 3t - 4t^3, \\ y = 2t\sqrt{1-t^2}, \end{cases} t \in [-1, 1]$, 则该方程的曲线是 ()



- 已知函数 $f(x) = 3\sin x + 2$, 若对任意的 $x_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 都存在 $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 使得 $f(x_1) + 2f(x_2 + \theta) = 3$ 成立, 则 θ 的值可以是 ()
 (A) $\frac{3\pi}{5}$ (B) $\frac{4\pi}{5}$ (C) $\frac{6\pi}{5}$ (D) $\frac{7\pi}{5}$
- 若两两不相等的实数 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ 满足:
 ① $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3$;
 ② $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$;
 ③ $x_1y_1 + x_3y_3 = 2x_2y_2$.
 则以下选项中恒成立的是 ()
 (A) $2x_2 < x_1 + x_3$ (B) $2x_2 > x_1 + x_3$ (C) $x_2^2 < x_1x_3$ (D) $x_2^2 > x_1x_3$

三、解答题

- 如图所示, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 2$, $AA_1 = 3$.
 (1) 若点 P 是棱 A_1D_1 上的动点, 求三棱锥 $C - PAD$ 的体积;
 (2) 求直线 AB_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角的大小. (结果用反三角函数数值表示)



- 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边的边长分别为 a, b, c , 且 $a = 3$, $b = 2c$.
 (1) 若 $A = \frac{2\pi}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;
 (2) 若 $2\sin B - \sin C = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

19. 已知某企业今年 (2021 年) 第一个季度的营业额为 1.1 亿元, 以后每个季度的营业额比上个季度增加 0.05 亿元, 该企业第一季度的利润为 0.16 亿元, 以后每季度比前一季度增长 4%.
- (1) 求 2021 年起前 20 季度营业额的总和;
 - (2) 请问哪一年的第几个季度的利润首次超过该季度营业额的 18%.

20. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, F_1, F_2 为 Γ 的左、右焦点, 直线 l 过点 $P(m, 0)$ ($m < -\sqrt{2}$) 交 Γ 于 A, B 两点, 且 A, B 在 x 轴上方, 点 A 在线段 BP 上.
- (1) 若 B 是 Γ 的上顶点, 且 $|\overrightarrow{BF_1}| = |\overrightarrow{PF_1}|$, 求 m 的值;
 - (2) 若 $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2A} = \frac{1}{3}$, 且原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{4\sqrt{15}}{15}$, 求直线 l 的方程;
 - (3) 对于任意点 P , 是否存在唯一的直线 l , 使得 $\overrightarrow{F_1A} \parallel \overrightarrow{F_2B}$ 成立, 若存在, 求出直线 l 的方程, 若不存在, 请说明理由.

21. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 若对任意的 $x_1, x_2, x_1 - x_2 \in S$, 均有 $f(x_1) - f(x_2) \in S$, 则称 $f(x)$ 是 S 关联.
- (1) 判断函数 $f(x) = 2x + 1$ 是否是 $[0, +\infty)$ 关联? 是否是 $[0, 1]$ 关联? 并说明理由;
 - (2) 若 $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联, 当 $x \in [0, 3)$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$, 解不等式 $2 \leq f(x) \leq 3$;
 - (3) 证明: “ $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联, 且是 $[0, +\infty)$ 关联”当且仅当“ $f(x)$ 是 $[1, 2]$ 关联”.