2021 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 文)

一、选择题

1. 已知全集 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, 集合 $M=\{1,\ 2\}$, $N=\{3,\ 4\}$, 则 $\complement_U(M\cup N)=$ ( )

(A) $\{5\}$ (B) $\{1,\ 2\}$ (C) $\{3,\ 4\}$ (D) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

2. 设 $\mathrm{i}z=4+3\mathrm{i}$, 则 $z=$ ( )

(A) $-3-4\mathrm{i}$ (B) $-3+4\mathrm{i}$ (C) $3-4\mathrm{i}$ (D) $3+4\mathrm{i}$

3. 已知命题 p: $\exists x\in\mathbf{R}$, $\sin x<1$; 命题 q: $\forall x\in\mathbf{R}$, $\mathrm{e}^{|x|}\geqslant 1$, 则下列命题中为真命题的是 ( )

(A) $p\wedge q$ (B) $\neg p\wedge q$ (C) $p\wedge\neg q$ (D) $\neg(p\vee q)$

4. 函数 $f(x)=\sin\dfrac{x}{3}+\cos\dfrac{x}{3}$ 的最小正周期和最大值分别是 ( )

(A) 3π 和 $\sqrt{2}$ (B) 3π 和 2 (C) 6π 和 $\sqrt{2}$ (D) 6π 和 2

5. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 4,\\ x-y\leqslant 2,\\ y\leqslant 3,\end{cases}$ 则 $z=3x+y$ 的最小值为 ( )

(A) 18 (B) 10 (C) 6 (D) 4

6. $\cos^2\dfrac{\pi}{12}-\cos^2\dfrac{5\pi}{12}=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 随机取一个数, 则取到的数小于 $\dfrac{1}{3}$ 的概率为 ( )

(A) $\dfrac{3}{4}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{6}$

8. 下列函数中最小值为 4 的是 ( )

(A) $y=x^2+2x+4$ (B) $y=|\sin x|+\dfrac{4}{|\sin x|}$

(C) $y=2^x+2^{2-x}$ (D) $y=\ln x+\dfrac{4}{\ln x}$

9. 设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中是奇函数的是 ( )

(A) $f(x-1)-1$ (B) $f(x-1)+1$

(C) $f(x+1)-1$ (D) $f(x+1)+1$

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成的角为 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{6}$

11. 设 B 是椭圆 C: $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ 的上顶点, 点 P 在 C 上, 则 $|PB|$ 的最大值是 ( )

(A) $\dfrac{5}{2}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) 2

12. 设 $a\neq 0$, 若 $x=a$ 是函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则 ( )

(A) $a<b$ (B) $a>b$ (C) $ab<a^2$ (D) $ab>a^2$

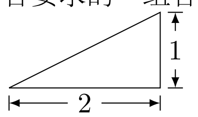
二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,5)$, $\boldsymbol{b}=(\lambda,4)$, 若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$, 则 $\lambda=$______.

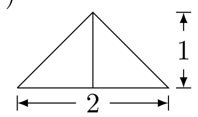
14. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的右焦点到直线 $x+2y-8=0$ 的距离为______.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 面积为 $\sqrt{3}$, $B=60^\circ$, $a^2+c^2=3ac$, 则 $b=$______.

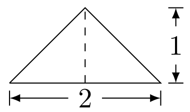
16. 以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图. 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为______. (写出符合要求的一组答案即可)



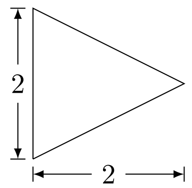
图①



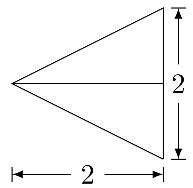
图②



图③



图④



图⑤

三、解答题

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备, 为检验新设备生产产品的某项指标有无提高, 用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品, 得到各件产品该项指标数据如下:

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均值分别记为 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$, 样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2.

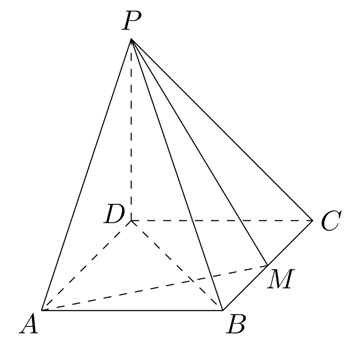
(1) 求 $\overline{x}$, $\overline{y}$, s_1^2, s_2^2;

(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果 $\overline{y}-\overline{x}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{s_1^2+s_2^2}{10}}$, 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高).

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD\perp$ 底面 $ABCD$, M 为 BC 的中点, 且 $PB\perp AM$.

(1) 证明: 平面 $PAM\perp$ 平面 PBD;

(2) 若 $PD=DC=1$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



19. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\dfrac{na_n}{3}$. 已知 a_1, $3a_2$, $9a_3$ 成等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 证明 $T_n<\dfrac{S_n}{2}$.

20. 已知抛物线 C: $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知 O 为坐标原点, 点 P 在 C 上, 点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}$, 求直线 OQ 斜率的最大值.

21. 设函数 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求曲线 $y=f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y=f(x)$ 的公共点的坐标.

22. 在直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2,1)$, 半径为 1.

(1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程;

(2) 过点 $F(4,1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求这两条切线的极坐标方程.

23. 已知函数 $f(x)=|x-a|+|x+3|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x)\geqslant 6$ 的解集;

(2) 若 $f(x)>-a$, 求 a 的取值范围.