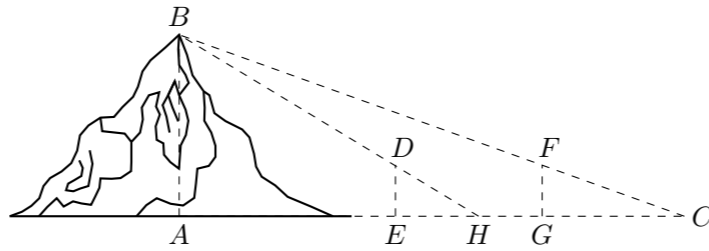


2021 普通高等学校招生考试 (全国卷 I 理)

一、选择题

1. 设 $2(z + \bar{z}) + 3(z - \bar{z}) = 4 + 6i$, 则 $z =$ ()
 (A) $1 - 2i$ (B) $1 + 2i$ (C) $1 + i$ (D) $1 - i$
2. 已知集合 $S = \{s \mid s = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $T = \{t \mid t = 4n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, 则 $S \cap T =$ ()
 (A) \emptyset (B) S (C) T (D) \mathbf{Z}
3. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x < 1$; 命题 $q: \forall x \in \mathbf{R}, e^{|x|} \geq 1$, 则下列命题中为真命题的是 ()
 (A) $p \wedge q$ (B) $\neg p \wedge q$ (C) $p \wedge \neg q$ (D) $\neg(p \vee q)$
4. 设函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, 则下列函数中是奇函数的是 ()
 (A) $f(x-1) - 1$ (B) $f(x-1) + 1$
 (C) $f(x+1) - 1$ (D) $f(x+1) + 1$
5. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成角为 ()
 (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{6}$
6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训, 每名志愿者只分配到 1 个项目, 每个项目至少分配 1 名志愿者, 则不同的分配方案共有 ()
 (A) 60 种 (B) 120 种 (C) 240 种 (D) 480 种
7. 把函数 $y = f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象, 则 $f(x) =$ ()
 (A) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{12}\right)$ (B) $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$
 (C) $\sin\left(2x - \frac{7\pi}{12}\right)$ (D) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$
8. 在区间 $(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 中各随机取 1 个数, 则两数之和大于 $\frac{7}{4}$ 的概率为 ()
 (A) $\frac{7}{9}$ (B) $\frac{23}{32}$ (C) $\frac{9}{32}$ (D) $\frac{2}{9}$
9. 魏晋时期刘徽编写的《海岛算经》是关于测量的数学著作, 其中第一题是测量海岛的高. 如图, 点 E, H, G 在水平线 AC 上, DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度, 称为“表高”, EG 称为“表距”, GC 和 EH 都称为“表目距”, GC 与 EH 的差称为“表目距的差”, 则海岛的高 $AB =$ ()

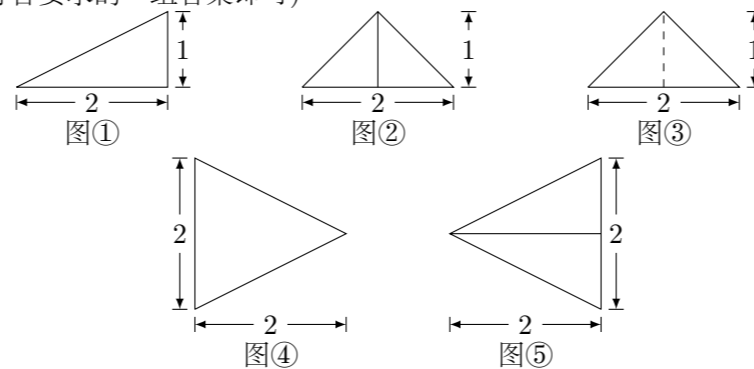


- (A) $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$ (B) $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$
 (C) $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$ (D) $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$

10. 设 $a \neq 0$, 若 $x = a$ 是函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点, 则 ()
 (A) $a < b$ (B) $a > b$ (C) $ab < a^2$ (D) $ab > a^2$
11. 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的上顶点, 若 C 上任意一点 P 都满足 $|PB| \leq 2b$, 则 C 的离心率的取值范围是 ()
 (A) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ (B) $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ (C) $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (D) $\left(0, \frac{1}{2}\right]$
12. 设 $a = 2 \ln 1.01$, $b = \ln 1.02$, $c = \sqrt{1.04} - 1$, 则 ()
 (A) $a < b < c$ (B) $b < c < a$ (C) $b < a < c$ (D) $c < a < b$

二、填空题

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1$ ($m > 0$) 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + my = 0$, 则 C 的焦距为_____.
14. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 4)$, $(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 $\lambda =$ _____.
15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 $\sqrt{3}$, $B = 60^\circ$, $a^2 + c^2 = 3ac$, 则 $b =$ _____.
16. 以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图. 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为_____. (写出符合要求的一组答案即可)



三、解答题

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备, 为检验新设备生产产品的某项指标有无提高, 用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品, 得到各件产品该项指标数据如下:

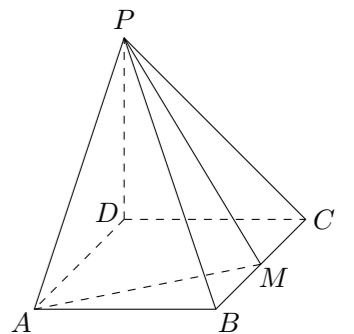
旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均值分别记为 \bar{x} 和 \bar{y} , 样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2 .

- (1) 求 $\bar{x}, \bar{y}, s_1^2, s_2^2$;
- (2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果 $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$, 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高, 否则不认为有显著提高).

18. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $PD = DC = 1$, M 为 BC 的中点, 且 $PB \perp AM$.

- (1) 求 BC ;
- (2) 求二面角 $A-PM-B$ 的正弦值.



19. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积, 已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$.
- (1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;
- (2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.
20. 设函数 $f(x) = \ln(a-x)$, 已知 $x=0$ 是函数 $y = xf(x)$ 的极值点.
- (1) 求 a ;
- (2) 设函数 $g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)}$, 证明: $g(x) < 1$.
21. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 且 F 与圆 $M: x^2 + (y+4)^2 = 1$ 上的点的距离的最小值为 4.
- (1) 求 p ;
- (2) 若点 P 在圆 M 上, PA, PB 是 C 的两条切线, A, B 是切点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.
22. 在直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2,1)$, 半径为 1.
- (1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程;
- (2) 过点 $F(4,1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求这两条切线的极坐标方程.
23. 已知函数 $f(x) = |x-a| + |x+3|$.
- (1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集;
- (2) 若 $f(x) > -a$, 求 a 的取值范围.