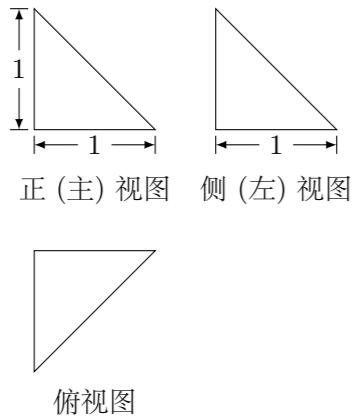


2021 普通高等学校招生考试 (北京卷)

一、选择题

- 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 则 $A \cup B =$ ()
 (A) $\{x | -1 < x < 2\}$ (B) $\{x | -1 < x \leq 2\}$
 (C) $\{x | 0 \leq x < 1\}$ (D) $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$
- 若复数 z 满足 $(1-i) \cdot z = 2$, 则 $z =$ ()
 (A) $-1-i$ (B) $-1+i$ (C) $1-i$ (D) $1+i$
- 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则“ $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增”是“ $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ”的 ()
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- 某四面体的三视图如图所示, 该四面体的表面积为 ()



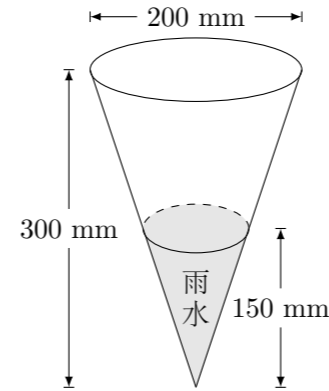
- (A) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $3 + \sqrt{3}$ (C) $\frac{3}{2} + \sqrt{3}$ (D) $3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

- 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 2, 且过点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 则双曲线的方程为 ()
 (A) $2x^2 - y^2 = 1$ (B) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ (C) $5x^2 - 3y^2 = 1$ (D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$
- 《中国共产党党旗党徽制作和使用的若干规定》指出, 中国共产党党旗为旗面缀有金黄色党徽图案的红旗, 通用规格有五种. 这五种规格党旗的长 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (单位: cm) 成等差数列, 对应的宽为 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 (单位: cm), 且长与宽之比都相等. 已知 $a_1 = 288, a_5 = 96, b_1 = 192$, 则 $b_3 =$ ()
 (A) 64 (B) 96 (C) 128 (D) 160

- 函数 $f(x) = \cos x - \cos 2x$ 是 ()
 (A) 奇函数, 且最大值为 2 (B) 偶函数, 且最大值为 2
 (C) 奇函数, 且最大值为 $\frac{9}{8}$ (D) 偶函数, 且最大值为 $\frac{9}{8}$

- 某一时段内, 从天空降落到地面上的雨水, 未经蒸发、渗漏、流失而在水面上积聚的深度, 称为这个时段的降雨量 (单位: mm). 24 h 降雨量的等级划分如下:

等级	24 h 降雨量 (精确到 0.1)
...	...
小雨	0.1 ~ 9.9
中雨	10.0 ~ 24.9
大雨	25.0 ~ 49.9
暴雨	50.0 ~ 99.9
...	...



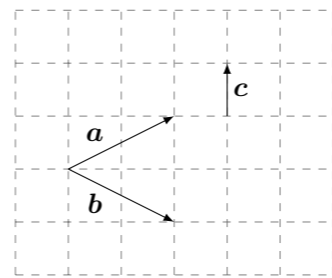
在综合实践活动中, 某小组自制了一个底面直径为 200 mm, 高为 300 mm 的圆锥形雨量器. 若一次降雨过程中, 该雨量器收集的 24 h 的雨水高度是 150 mm (如图所示), 则这 24 h 降雨量的等级是 ()

- (A) 小雨 (B) 中雨 (C) 大雨 (D) 暴雨

- 已知直线 $y = kx + m$ (m 为常数) 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 交于点 M, N . 当 k 变化时, 若 $|MN|$ 的最小值为 2, 则 $m =$ ()
 (A) ± 1 (B) $\pm\sqrt{2}$ (C) $\pm\sqrt{3}$ (D) ± 2
- 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为整数的递增数列, 且 $a_1 \geq 3$. 若 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 100$, 则 n 的最大值为 ()
 (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12

二、填空题

- 在 $(x^3 - \frac{1}{x})^4$ 的展开式中, 常数项为_____. (用数字作答)
- 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 M 在抛物线上, MN 垂直 x 轴于点 N . 若 $|MF| = 6$, 则点 M 的横坐标为_____; $\triangle MNF$ 的面积为_____.
- 已知向量 a, b, c 在正方形网格中的位置如图所示, 若网格纸上小正方形的边长为 1, 则 $(a+b) \cdot c =$ _____; $a \cdot b =$ _____.



- 若点 $A(\cos \theta, \sin \theta)$ 关于 y 轴的对称点为 $B(\cos(\theta + \frac{\pi}{6}), \sin(\theta + \frac{\pi}{6}))$, 则 θ 的一个取值为_____.
- 已知函数 $f(x) = |\lg x| - kx - 2$. 给出下列四个结论:
 ① 当 $k = 0$ 时, $f(x)$ 恰有 2 个零点;

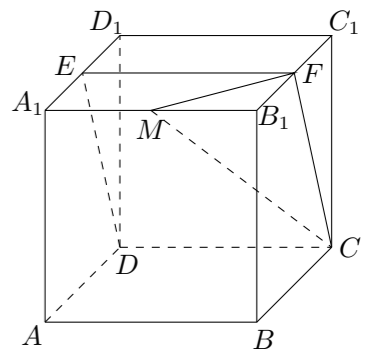
- ② 存在负数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 1 个零点;
 - ③ 存在负数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点;
 - ④ 存在正数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点.
- 其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题

- 在 $\triangle ABC$ 中, $c = 2b \cos B, C = \frac{2\pi}{3}$.
 (1) 求 $\angle B$;
 (2) 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定, 求 BC 边上中线的长.
 条件①: $c = \sqrt{2}b$;
 条件②: $\triangle ABC$ 的周长为 $4 + 2\sqrt{3}$;
 条件③: $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

- 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 A_1D_1 的中点, B_1C_1 与平面 CDE 交于点 F .

- (1) 求证: F 为 B_1C_1 中点;
- (2) 若 M 是棱 A_1B_1 上一点, 且二面角 $M - FC - E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 求 $\frac{A_1M}{A_1B_1}$ 的值.



18. 在核酸检测中, “ k 合 1”混采核酸检测是指: 先将 k 个人的样本混合在一起进行 1 次检测, 如果这 k 个人都没感染新冠病毒, 则检测结果为阴性; 如果这 k 个人中有人感染新冠病毒, 则检测结果阳性, 此时需对每人再进行一次检测, 得到每人的检测结果, 检测结束. 现对 100 人进行核酸检测, 假设其中只有 2 人感染新冠病毒, 并假设每次检测结果准确.

(1) 将这 100 人随机分成 10 组, 每组 10 人, 且对每组都采用“10 合 1”混采核酸检测.

① 如果感染新冠病毒的 2 人在同一组, 求检测的总次数;

② 已知感染新冠病毒的 2 人在同一组的概率为 $\frac{1}{11}$, 设 X 是检测的总次数, 求 X 的分布列与数学期望 EX ;

(2) 将这 100 人随机分成 20 组, 每组 5 人, 且对每组都采用“5 合 1”混采核酸检测. 设 Y 是检测的总次数, 试判断数学期望 EY 与 (1) 中的 EX 的大小. (结论不要求证明)

20. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(0, -2)$, 以椭圆 E 的四个顶点为顶点的四边形面积为 $4\sqrt{5}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 过点 $P(0, -3)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B, C , 直线 AB, AC 分别与直线 $y = -3$ 交于点 M, N , 当 $|PM| + |PN| \leq 15$ 时, 求 k 的取值范围.

21. 设 p 为实数. 若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足如下三个性质, 则称 $\{a_n\}$ 为 R_p 数列:

① $a_1 + p \geq 0$, 且 $a_2 + p = 0$;

② $a_{4n-1} < a_{4n} (n = 1, 2, \dots)$;

③ $a_{m+n} \in \{a_m + a_n + p, a_m + a_n + p + 1\} (m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots)$.

(1) 如果数列 $\{a_n\}$ 的前四项分别为 2, -2, -2, -1, 那么 $\{a_n\}$ 是否可能为 R_2 数列? 说明理由;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是 R_0 数列, 求 a_5 ;

(3) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 是否存在 R_p 数列 $\{a_n\}$, 使得 $S_n \geq S_{10}$ 恒成立? 如果存在, 求出所有的 p ; 如果不存在, 说明理由.

19. 已知函数 $f(x) = \frac{3-2x}{x^2+a}$.

(1) 若 $a = 0$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极值, 求 $f(x)$ 的单调区间, 并求其最大值与最小值.