2021 普通高等学校招生考试 (天津卷)

一、单选题

1. 设集合 $A=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$, $C=\{0,\ 2,\ 4\}$, 则 $(A\cap B)\cup C=$ ( )

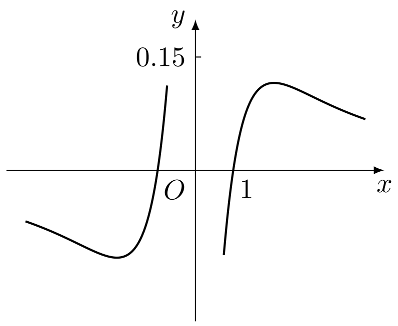
(A) $\{0\}$ (B) $\{0,\ 1,\ 3,\ 5\}$ (C) $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ (D) $\{0,\ 2,\ 3,\ 4\}$

2. 已知 $a\in\mathbf{R}$, 则“$a>6$”是“$a^2>36$”的 ( )

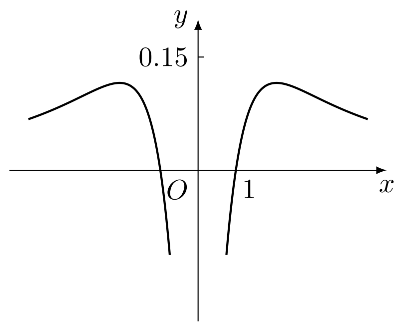
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

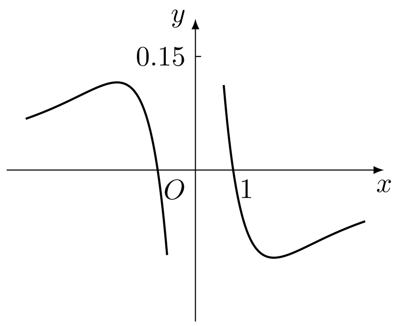
3. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2+2}$ 的图象大致为 ( )



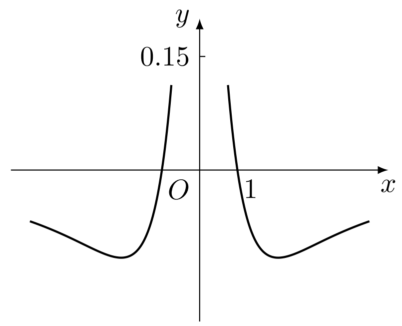
(A)



(B)

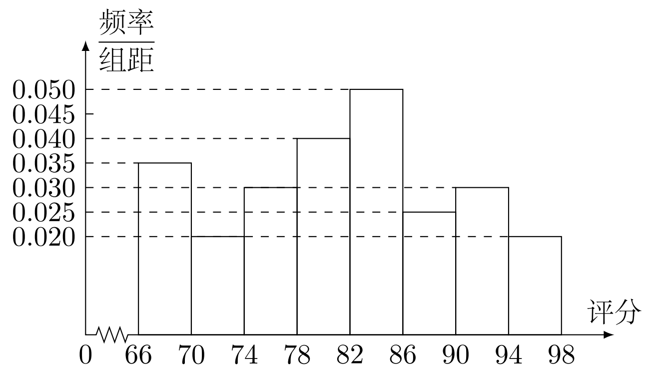


(C)



(D)

4. 从某网络平台推荐的影视作品中抽取 400 部, 统计其评分数据, 将所得 400 个评分数据氛围 8 组: $[66,70)$, $[70,74)$, $\cdots$, $[94,98]$, 并整理得到如下的频率分布直方图, 则评分在区间 $[82,86)$ 内的影视作品数量是 ( )



(A) 20 (B) 40 (C) 64 (D) 80

5. 设 $a=\log_2 0.3$, $b=\log_{\frac{1}{2}}0.4$, $c=0.4^{0.3}$, 则三者大小关系为 ( )

(A) $a<b<c$ (B) $c<a<b$ (C) $b<c<a$ (D) $a<c<b$

6. 两个圆锥的底面是一个球的同一截面, 顶点均在球面上, 若球的体积为 $\dfrac{32\pi}{3}$, 两个圆锥的高之比为 $1:3$, 则这两个圆锥的体积之和为 ( )

(A) 3π (B) 4π (C) 9π (D) 12π

7. 若 $2^a=5^b=10$, 则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=$ ( )

(A) -1 (B) $\lg 7$ (C) 1 (D) $\log_7 10$

8. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的右焦点与抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点重合, 抛物线的准线交双曲线于 A, B 两点, 交双曲线的渐近线于 C, D 两点, 若 $|CD|=\sqrt{2}|AB|$, 则双曲线的离心率为 ( )

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) 3

9. 设 $a\in\mathbf{R}$, 函数 $f(x)=\begin{cases}\cos(2\pi x-2\pi a),\ x<a\\ x^2-2(a+1)x+a^2+5,\ x\geqslant a\end{cases}$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内恰有 6 个零点, 则 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left(2,\dfrac{9}{4}\right]\cup\left(\dfrac{5}{2}\ \dfrac{11}{4}\right]$ (B) $\left(\dfrac{7}{4},2\right]\cup\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{11}{4}\right]$

(C) $\left(2,\dfrac{9}{4}\right]\cup\left[\dfrac{11}{4},3\right)$ (D) $\left(\dfrac{7}{4},2\right)\cup\left[\dfrac{11}{4},3\right)$

二、填空题

10. i 是虚数单位, 复数 $\dfrac{9+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=$______.

11. 在 $\left(2x^3+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中, x^6 的系数是______.

12. 若斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与 y 轴交于点 A, 与圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 相切于点 B, 则 $|AB|=$______.

13. 若 $a>0$, $b>0$, 则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{b^2}+b$ 的最小值为______.

14. 甲、乙两人在每次猜谜活动中各猜一个谜语, 若一方猜对且另一方猜错, 则猜对的一方获胜, 否则本次平局. 已知每次活动中, 甲、乙猜对的概率分别为 $\dfrac{5}{6}$ 和 $\dfrac{3}{5}$, 且每次活动中甲、乙猜对与否互不影响, 各次活动也互不影响, 则一次活动中, 甲获胜的概率为______; 3 次活动中, 甲至少获胜 2 次的概率为______.

15. 在边长为 1 的等边三角形 ABC 中, D 为线段 BC 上的动点, $DE\perp AB$ 且交 AB 于点 E, $DF\parallel AB$ 且交 AC 于点 F, 则 $\left|2\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}\right|$ 的值为______; $\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}\right)\cdot\overrightarrow{DA}$ 的最小值为______.

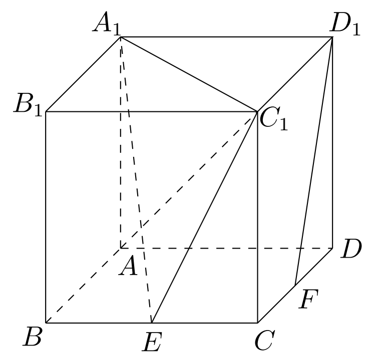
三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对边分别为 a, b, c, 且 $\sin A:\sin B:\sin C=2:1:\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$.

(1) 求 a 的值;
(2) 求 $\cos C$ 的值;
(3) 求 $\sin\left(2C-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

17. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 BC, CD 的中点.

(1) 求证: $D_1F\parallel$ 平面 A_1EC_1;
(2) 求直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成角的正弦值;
(3) 求二面角 $A-A_1C_1-E$ 的正弦值.



18. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右焦点为 F, 上顶点为 B, 离心率为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, 且 $|BF|=\sqrt{5}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 直线 l 与椭圆有唯一的公共点 M, 与 y 轴的正半轴交于点 N. 过 N 与 BF 垂直的直线交 x 轴于点 P. 若 $MP\parallel BF$, 求直线 l 的方程.

19. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 其前 8 项的和为 64. $\{b_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列, $b_1=4$, $b_3-b_2=48$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n=b_{2n}+\dfrac{1}{b_n}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

① 证明: $\{c_n^2-c_{2n}\}$ 是等比数列;

② 证明: $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{a_ka_{k+1}}{c_k^2-c_{2k}}}<2\sqrt{2}\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

20. 已知 $a>0$, 函数 $f(x)=ax-xe^x$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 证明 $f(x)$ 存在唯一的极值点;

(3) 若存在 a, 使得 $f(x)\leqslant a+b$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立, 求实数 b 的取值范围.