2022 普通高等学校招生考试 (上海卷)

一、填空题

1. 若复数 $z=1+\mathrm{i}$ (其中 i 为虚数单位), 则 $2\overline{z}=$______.

2. 双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-y^2=1$ 的实轴长为______.

3. 函数 $y=\cos^2 x-\sin^2 x+1$ 的最小正周期为______.

4. 设 a 为常数, 若行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ 的值与行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ 的值相等, 则 $a=$______.

5. 若圆柱的高为 4, 底面积为 9π, 则该圆柱的侧面积为______.

6. 若实数 x, y 满足 $x-y\leqslant 0, x+y-1\geqslant 0$, 则 $z=x+2y$ 的最小值为______.

7. 在 $(3+x)^n$ 的二项展开式中, 若 x^2 的系数是常数项的 5 倍, 则 $n=$______.

8. 设 a 为常数, 若函数 $f(x)=\begin{cases} a^2x-1, & x<0, \\ x+a, & x>0. \end{cases}$ 为奇函数, 则实数 $a=$______.

9. 为了检测学生的身体素质指标, 需从游泳类 1 项, 球类 3 项, 田径类 4 项, 共 8 项项目中随机抽取 4 项进行测试, 每一类都被抽到的概率为______. (结果用最简分数表示)

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零, S_n 为其前 n 项和. 若 $S_5=0$, 则 S_1, S_2, $\cdots$, S_{100} 这 100 个数中所有不同数值的个数为______.

11. 已知平面非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的模均为 λ, 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=2, \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1$, 则 $\lambda=$______.

12. 设函数 $y=f(x)$, 定义域为 $[0,+\infty)$, 值域为 A, 且对定义域中任意实数 x 均成立 $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$, 若 $\{y \mid y=f(x),\ x\in[0,a]\}=A$, 则实数 a 的取值范围是______.

二、选择题

13. 若集合 $A=[-1,2)$, $B=\mathbf{Z}$, 则 $A\cap B=$ ( )

(A) $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$ (B) $\{-1,\ 0,\ 1\}$

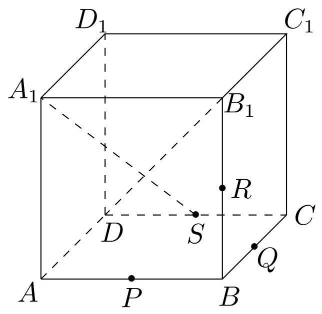
(C) $\{-1,\ 0\}$ (D) $\{-1\}$

14. 若实数 a, b 满足 $a>b>0$, 则下列不等式中, 恒成立的是 ( )

(A) $a+b>2\sqrt{ab}$ (B) $a+b<2\sqrt{ab}$

(C) $\dfrac{a}{2}+2b>2\sqrt{ab}$ (D) $\dfrac{a}{2}+2b<2\sqrt{ab}$

15. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P、Q、R、S 分别为棱 AB、BC、BB_1、CD 的中点, 连接 A_1S, B_1D. 对于空间任意两点 M、N, 若线段 MN 上不存在也在线段 A_1S、B_1D 上的点, 则称 M、N 两点"可视", 则下列选项中与点 D_1 "可视"的点为 ( )



(A) 点 P (B) 点 B (C) 点 R (D) 点 Q

16. 在平面直角坐标系中, 设点集 $\Omega=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x-k)^2+\left(y-k^2\right)^2=4|k|,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$, 有结论:

① 存在直线 l, 使得 Ω 中不存在点在 l 上, 但存在点在 l 两侧;

② 存在直线 l, 使得 Ω 中存在无数个点在 l 上.

关于以上两个结论, 正确的判断是 ( )

(A) ①成立, ②成立 (B) ①成立, ②不成立

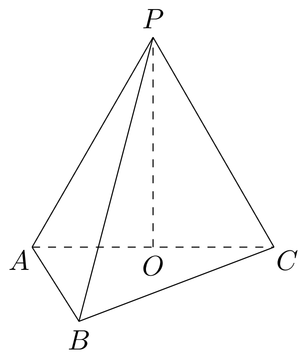
(C) ①不成立, ②成立 (D) ①不成立, ②不成立

三、解答题

17. 如图, 已知三棱锥 $P-ABC$, 底面 ABC 为等边三角形, O 为 AC 的中点, $AP=AC=2$, 且 $PO\perp$ 底面 ABC.

(1) 求三棱锥 $P-ABC$ 的体积 V;

(2) 若 M 为 BC 中点, 求 PM 与平面 PAC 所成角的大小.



18. 设 a 为常数, $f(x)=\log_3(a+x)+\log_3(6-x)$.

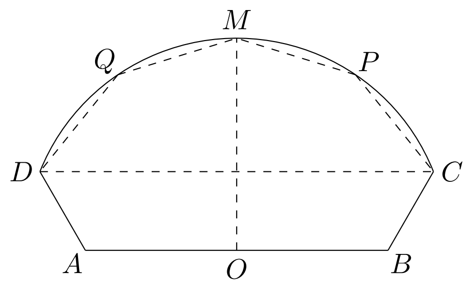
(1) 若将函数 $y=f(x)$ 的图象向下移 m $(m>0)$ 个单位后, 其图象经过 $(3,0)$, $(5,0)$ 两点, 求实数 a 和 m 的值;

(2) 若 $a>-3$ 且 $a\neq 0$, 解不等式 $f(x)\leqslant f(6-x)$.

19. 如图, $AD=BC=6$, $AB=20$, $\angle DAB=\angle ABC=120^\circ$, O 为 AB 中点, 曲线 CD 上任意一点到点 O 的距离均相等, P、M、Q 为曲线 CD 上的点, 且 $MO\perp AB$, 点 P 与点 Q 关于直线 OM 对称.

(1) 若点 P 与点 C 重合, 求 $\angle POB$ 的大小;

(2) 点 P 在何位置时, 五边形 $CPMQD$ 的面积 S 取到最大值, 并求出该最大值.



20. 设椭圆 Γ: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, $F_1(-\sqrt{2},0)$, $F_2(\sqrt{2},0)$ 为 Γ 的焦点, A 为 Γ 的下顶点, M 为直线 l: $x+y-4\sqrt{2}=0$ 上一点.

(1) 若 $a=2$, 且 AM 的中点在 x 轴上, 求点 M 的坐标;

(2) 若直线 l 与 y 轴的交点为 B, 直线 AM 经过点 F_2, 且在 $\triangle ABM$ 中有一内角的余弦值为 $\dfrac{3}{5}$, 求 b 的值;

(3) 若 Γ 上一点 P 到 l 的距离为 d, 且 $|PF_1|+|PF_2|+d=6$, 求 d 的最小值.

21. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_2=3$, 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$, 均存在正整数 $i\in[1,n-1]$, 满足 $a_{n+1}=2a_n-a_i$.

(1) 求 a_4 所有可能的值;

(2) 命题 p: 若 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 成等差数列, 则 $a_9<30$, 证明 p 是真命题, 同时写出 p 的逆命题 q, 并判断命题 q 是真命题还是假命题, 说明理由;

(3) 若 $a_{2m}=3^m$ $(m\in\mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.