2022 普通高等学校招生考试 (全国乙卷文)

一、单选题

1. 集合 $M=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$, $N=\{x\mid -1<x<6\}$, 则 $M\cap N=$ ( )

(A) $\{2,\ 4\}$　(B) $\{2,\ 4,\ 6\}$

(C) $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$　(D) $\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

2. 设 $(1+2\mathrm{i})a+b=2\mathrm{i}$, 其中 a, b 为实数, 则 ( )

(A) $a=1,\ b=-1$　(B) $a=1,\ b=1$

(C) $a=-1,\ b=1$　(D) $a=-1,\ b=-1$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$, $\boldsymbol{b}=(-2,4)$, 则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$ ( )

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

4. 分别统计了甲、乙两位同学 16 周的各周课外体育运动时长 (单位: h), 得如下茎叶图:

甲		乙
6 1	5.	
8 5 3 0	6.	3
7 5 3 2	7.	4 6
6 4 2 1	8.	1 2 2 5 6 6 6 6
4 2	9.	0 2 3 8
	10.	1

则下列结论中错误的是 ( )

(A) 甲同学周课外体育运动时长的样本中位数为 7.4

(B) 乙同学周课外体育运动时长的样本平均数大于 8

(C) 甲同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值大于 0.4

(D) 乙同学周课外体育运动时长大于 8 的概率的估计值大于 0.6

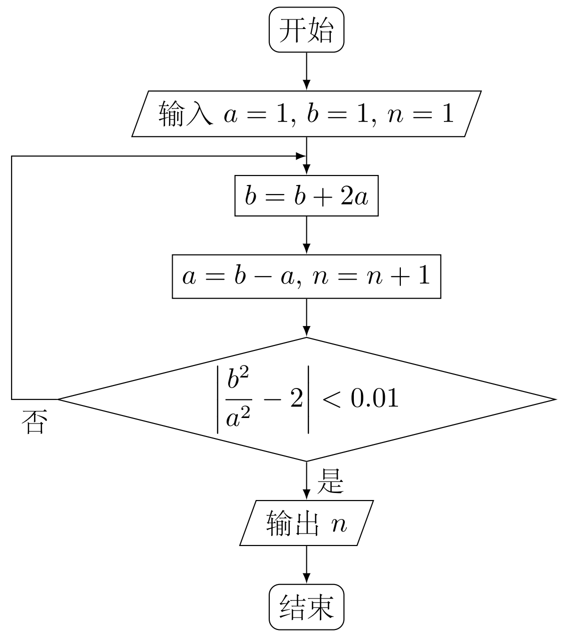
5. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geqslant 2, \\ x+2y\leqslant 4, \\ y\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最大值是 ( )

(A) -2　(B) 4　(C) 8　(D) 12

6. 设 F 为抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点, 点 A 在 C 上, 点 $B(3,0)$, 若 $|AF|=|BF|$, 则 $|AB|=$ ( )

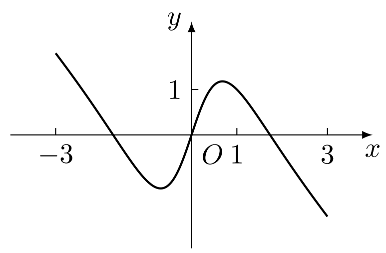
(A) 2　(B) $2\sqrt{2}$　(C) 3　(D) $3\sqrt{2}$

7. 执行如图的程序框图, 输出的 $n=$ ( )



(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6

8. 如图是下列四个函数中的某个函数在 $[-3,3]$ 的大致图象, 则该函数是 ( )



(A) $y=\dfrac{-x^3+3x}{x^2+1}$　(B) $y=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$　(C) $y=\dfrac{2x\cos x}{x^2+1}$　(D) $y=\dfrac{2\sin x}{x^2+1}$

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 AB, BC 的中点, 则 ( )

(A) 平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1　(B) 平面 $B_1EF\perp$ 平面 A_1BD

(C) 平面 $B_1EF\parallel$ 平面 A_1AC　(D) 平面 $B_1EF\parallel$ 平面 A_1C_1D

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 168, $a_2-a_5=42$, 则 $a_6=$ ( )

(A) 14　(B) 12　(C) 6　(D) 3

11. 函数 $f(x)=\cos x+(x+1)\sin x+1$ 在区间 $[0,2\pi]$ 的最小值、最大值分别为 ( )

(A) $-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}$　(B) $-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}$　(C) $-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}+2$　(D) $-\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}+2$

12. 已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O, 底面的四个顶点均在球 O 的球面上, 则当该四棱锥的体积最大时, 其高为 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{1}{2}$　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

13. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $2S_3=3S_2+6$, 则公差 $d=$______.

14. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作, 则甲、乙都入选的概率为______.

15. 过四点 $(0,0)$, $(4,0)$, $(-1,1)$, $(4,2)$ 中的三点的一个圆的方程为______.

16. 若函数 $f(x)=\ln\left|a+\dfrac{1}{1-x}\right|+b$ 是奇函数, 则 $a=$______, $b=$______.

三、解答题

17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$.

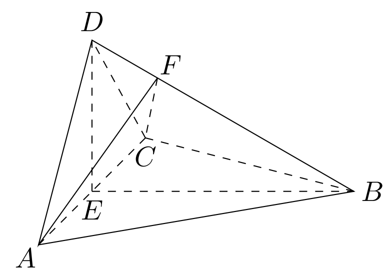
(1) 若 $A=2B$, 求 C;

(2) 证明: $2a^2=b^2+c^2$.

18. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $AD\perp CD$, $AD=CD$, $\angle ADB=\angle BDC$, E 为 AC 的中点.

(1) 证明: 平面 $BED\perp$ 平面 ACD;

(2) 设 $AB=BD=2$, $\angle ACB=60°$, 点 F 在 BD 上, 当 $\triangle AFC$ 的面积最小时, 求三棱锥 $F-ABC$ 的体积.



19. 某地经过多年的环境治理, 已将荒山改造成了绿水青山. 为估计一林区某种树木的总材积量, 随机选取了 10 棵这种树木, 测量每棵树的根部横截面积 (单位: m^2) 和材积量 (单位: m^3), 得到如下数据:

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{10} x_i^2=0.038$, $\sum\limits_{i=1}^{10} y_i^2=1.6158$, $\sum\limits_{i=1}^{10} x_i y_i=0.2474$.

(1) 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量;

(2) 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数 (精确到 0.01);

(3) 现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积, 并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 186 m^2. 已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比. 利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值.

附: 相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2 \sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$, $\sqrt{1.896} \approx 1.377$.

20. 已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{1}{x}-(a+1)\ln x$.

(1) 当 $a=0$ 时, 求 $f(x)$ 的最大值;

(2) 若 $f(x)$ 恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

21. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴、y 轴, 且过 $A(0,-2)$, $B\left(\dfrac{3}{2},-1\right)$ 两点.

(1) 求 E 的方程;

(2) 设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M, N 两点, 过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T, 点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$. 证明: 直线 HN 过定点.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos 2t, \\ y=2\sin t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)+m=0$.

(1) 写出 l 的直角坐标方程;

(2) 若 l 与 C 有公共点, 求 m 的取值范围.

23. 已知 a, b, c 都是正数, 且 $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}=1$, 证明:

(1) $abc \leqslant \dfrac{1}{9}$;

(2) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{abc}}$.