2022 普通高等学校招生考试 (全国乙卷理)

一、单选题

1. 设全集 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, 集合 M 满足 $\complement_U M=\{1,\ 3\}$, 则 ( )

(A) $2\in M$ (B) $3\in M$ (C) $4\notin M$ (D) $5\notin M$

2. 已知 $z=1-2\mathrm{i}$, 且 $z+a\bar{z}+b=0$, 其中 a, b 为实数, 则 ( )

(A) $a=1$, $b=-2$ (B) $a=-1$, $b=2$

(C) $a=1$, $b=2$ (D) $a=-1$, $b=-2$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$, $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=3$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ ( )

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

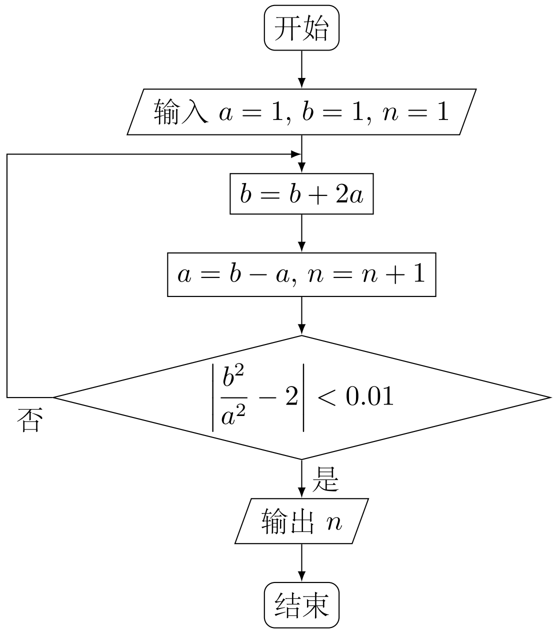
4. 嫦娥二号卫星在完成探月任务后, 继续进行深空探测, 成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星. 为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值, 用到数列 $\{b_n\}$: $b_1=1+\dfrac{1}{\alpha_1}$, $b_2=1+\dfrac{1}{\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2}}$, $b_3=1+\dfrac{1}{\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2+\dfrac{1}{\alpha_3}}}$, $\cdots$, 依此类推, 其中 $\alpha_k\in\mathbf{N}^*$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$. 则 ( )

(A) $b_1<b_5$ (B) $b_3<b_8$ (C) $b_6<b_2$ (D) $b_4<b_7$

5. 设 F 为抛物线 C: $y^2=4x$ 的焦点, 点 A 在 C 上, 点 $B(3,0)$, 若 $|AF|=|BF|$, 则 $|AB|=$ ( )

(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 3 (D) $3\sqrt{2}$

6. 执行如图的程序框图, 输出的 $n=$ ( )



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 AB, BC 的中点, 则 ( )

(A) 平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1 (B) 平面 $B_1EF\perp$ 平面 A_1BD

(C) 平面 $B_1EF\parallel$ 平面 A_1AC (D) 平面 $B_1EF\parallel$ 平面 A_1C_1D

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和为 168, $a_2-a_5=42$, 则 $a_6=$ ( )

(A) 14 (B) 12 (C) 6 (D) 3

9. 已知球 O 的半径为 1, 四棱锥的顶点为 O, 底面的四个顶点均在球 O 的球面上, 则当该四棱锥的体积最大时, 其高为 ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

10. 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘, 各盘比赛结果相互独立. 已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1, p_2, p_3, 且 $p_3>p_2>p_1>0$. 记该棋手连胜两盘的概率为 p, 则 ( )

(A) p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关

(B) 该棋手在第二盘与甲比赛, p 最大

(C) 该棋手在第二盘与乙比赛, p 最大

(D) 该棋手在第二盘与丙比赛, p 最大

11. 双曲线 C 的两个焦点为 F_1, F_2, 以 C 的实轴为直径的圆记为 D, 过 F_1 作 D 的切线与 C 交于 M, N 两点, 且 $\cos\angle F_1NF_2=\dfrac{3}{5}$, 则 C 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ (D) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

12. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x)+g(2-x)=5$, $g(x)-f(x-4)=7$. 若 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, $g(2)=4$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=$ ( )

(A) -21 (B) -22 (C) -23 (D) -24

二、填空题

13. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作, 则甲、乙都入选的概率为______.

14. 过四点 $(0,0)$, $(4,0)$, $(-1,1)$, $(4,2)$ 中的三点的一个圆的方程为______.

15. 记函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ 0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 T. 若 $f(T)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点, 则 ω 的最小值为______.

16. 已知 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-\mathrm{e}x^2$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的极小值点和极大值点. 若 $x_1<x_2$, 则 a 的取值范围是______.

三、解答题

17. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c, 已知 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$.

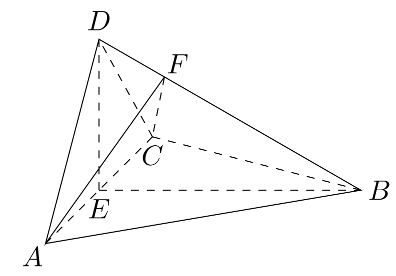
(1) 证明: $2a^2=b^2+c^2$;

(2) 若 $a=5$, $\cos A=\dfrac{25}{31}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. 如图, 四面体 $ABCD$ 中, $AD\perp CD$, $AD=CD$, $\angle ADB=\angle BDC$, E 为 AC 的中点.

(1) 证明: 平面 $BED\perp$ 平面 ACD;

(2) 设 $AB=BD=2$, $\angle ACB=60^\circ$, 点 F 在 BD 上, 当 $\triangle AFC$ 的面积最小时, 求 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值.



19. 某地经过多年的环境治理, 已将荒山改造成了绿水青山. 为估计一林区某种树木的总材积量, 随机选取了 10 棵这种树木, 测量每棵树的根部横截面积 (单位: m^2) 和材积量 (单位: m^3), 得到如下数据:

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038$, $\sum\limits_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158$, $\sum\limits_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$.

(1) 估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量;

(2) 求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数 (精确到 0.01);

(3) 现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积, 并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 186 m^2. 已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比. 利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值.

附: 相关系数 $r = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$, $\sqrt{1.896} \approx 1.377$.

20. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴、y 轴, 且过 $A(0,-2)$, $B\left(\dfrac{3}{2},-1\right)$ 两点.

(1) 求 E 的方程;

(2) 设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M, N 两点, 过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T, 点 H 满足 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$. 证明: 直线 HN 过定点.

21. 已知函数 $f(x) = \ln(1+x) + ax\mathrm{e}^{-x}$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$, $(0,+\infty)$ 各恰有一个零点, 求 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos 2t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) + m = 0$.

(1) 写出 l 的直角坐标方程;

(2) 若 l 与 C 有公共点, 求 m 的取值范围.

23. 已知 a, b, c 都是正数, 且 $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} = 1$, 证明:

(1) $abc \leqslant \dfrac{1}{9}$;

(2) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{abc}}$.