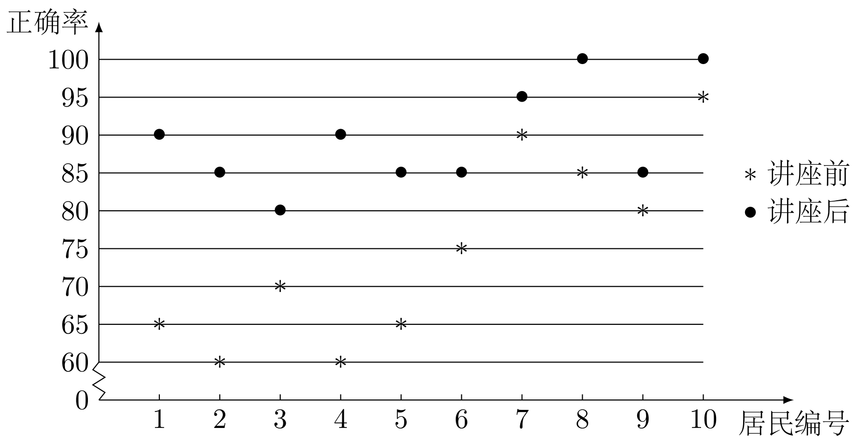
2022 普通高等学校招生考试 (全国甲卷文)

一、单选题

1. 设集合 $A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, $B=\left\{x \,\middle|\, 0 \leqslant x<\frac{5}{2}\right\}$, 则 $A \cap B=$ ( )

(A) $\{0,\ 1,\ 2\}$ (B) $\{-2,\ -1,\ 0\}$ (C) $\{0,\ 1\}$ (D) $\{1,\ 2\}$

2. 某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识. 为了解讲座效果, 随机抽取 10 位社区居民, 让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷, 这 10 位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图:



则 ( )

(A) 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于 70%

(B) 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%

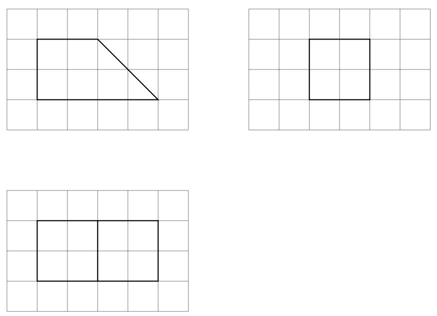
(C) 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

(D) 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

3. 若 $z=1+\mathrm{i}$, 则 $|\mathrm{i}z+3\bar{z}|=$ ( )

(A) $4\sqrt{5}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{5}$ (D) $2\sqrt{2}$

4. 如图, 网格纸上绘制的是一个多面体的三视图, 网格小正方形的边长为 1, 则该多面体的体积为 ( )



(A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 20

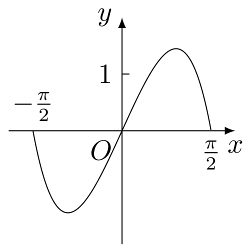
5. 将函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到曲线 C, 若 C 关于 y 轴对称, 则 ω 的最小值为 ( )

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

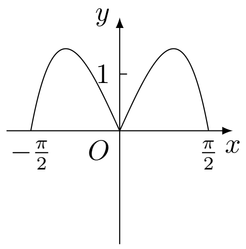
6. 从分别写有 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 张卡片中无放回随机抽取 2 张, 则抽到的 2 张卡片上的数字之积是 4 的倍数的概率为 ( )

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{2}{3}$

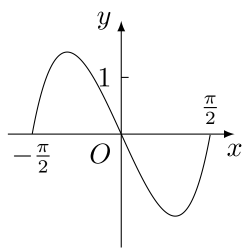
7. 函数 $y=(3^x-3^{-x})\cos x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的图象大致为 ( )



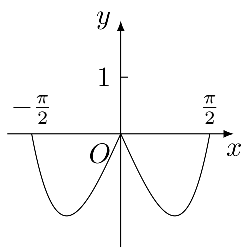
(A)



(B)



(C)



(D)

8. 当 $x=1$ 时, 函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$ 取得最大值 -2, 则 $f'(2)=$ ( )

(A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

9. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 $30°$, 则 ( )

(A) $AB=2AD$

(B) AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 $30°$

(C) $AC=CB_1$

(D) B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $45°$

10. 甲、乙两个圆锥的母线长相等, 侧面展开图的圆心角之和为 2π, 侧面积分别为 $S_{甲}$ 和 $S_{乙}$, 体积分别为 $V_{甲}$ 和 $V_{乙}$. 若 $\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$, 则 $\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$ ( )

(A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{10}$ (D) $\frac{5\sqrt{10}}{4}$

11. 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{3}$, A_1, A_2 分别为 C 的左、右顶点, B 为 C 的上顶点. 若 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$, 则 C 的方程为 ( )

(A) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{16}=1$ (B) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ (C) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ (D) $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

12. 已知 $9^m=10$, $a=10^m-11$, $b=8^m-9$, 则 ( )

(A) $a>0>b$ (B) $a>b>0$ (C) $b>a>0$ (D) $b>0>a$

二、填空题

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,3)$, $\boldsymbol{b}=(1,m+1)$. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, 则 $m=$______.

14. 设点 M 在直线 $2x+y-1=0$ 上, 点 $(3,0)$ 和 $(0,1)$ 均在 $\odot M$ 上, 则 $\odot M$ 的方程为______.

15. 记双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 e, 写出满足条件"直线 $y=2x$ 与 C 无公共点"的 e 的一个值______.

16. 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $\angle ADB=120°$, $AD=2$, $CD=2BD$, 当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时, $BD=$______.

三、解答题

17. 甲、乙两城之间的长途客车均由 A 和 B 两家公司运营. 为了解这两家公司长途客车的运行情况, 随机调查了甲、乙两城之间的 500 个班次, 得到下面列联表:

	准点班次数	未准点班次数
A	240	20
B	210	30

(1) 根据上表, 分别估计这两家公司甲、乙两城之间的长途客车准点的概率;

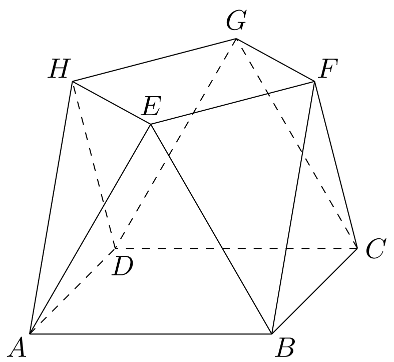
(2) 能否有 90% 的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准点与客车所属公司有关?

附: $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(K^2 \geqslant k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

18. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$.
(1) 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列;
(2) 若 a_4, a_7, a_9 成等比数列, 求 S_n 的最小值.

19. 小明同学参见综合实践活动, 设计了一个封闭的包装盒. 包装盒如图所示: 底面 $ABCD$ 是边长为 8 (单位: cm) 的正方形, $\triangle EAB$, $\triangle FBC$, $\triangle GCD$, $\triangle HDA$ 均为正三角形, 且它们所在的平面都与平面 $ABCD$ 垂直.
(1) 证明: $EF \parallel$ 平面 $ABCD$;
(2) 求该包装盒的容积 (不计包装盒材料的厚度).



20. 已知函数 $f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^2+a$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线也是曲线 $y=g(x)$ 的切线.
(1) 若 $x_1=-1$, 求 a;
(2) 求 a 的取值范围.

21. 设抛物线 C: $y^2=2px$ $(p>0)$ 的焦点为 F, 点 $D(p,0)$, 过 F 的直线交 C 于 M, N 两点. 当直线 MD 垂直于 x 轴时, $|MF|=3$.
(1) 求 C 的方程;
(2) 设直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B, 记直线 MN, AB 的倾斜角分别为 α, β. 当 $\alpha-\beta$ 取得最大值时, 求直线 AB 的方程.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{2+t}{6}, \\ y=\sqrt{t} \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=-\frac{2+s}{6}, \\ y=-\sqrt{s} \end{cases}$ (s 为参数).
(1) 写出 C_1 的普通方程;
(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_3 的极坐标方程为 $2\cos\theta-\sin\theta=0$, 求 C_3 与 C_1 交点的直角坐标, 及 C_3 与 C_2 交点的直角坐标.

23. 已知 a, b, c 均为正数, 且 $a^2+b^2+4c^2=3$, 证明:
(1) $a+b+2c \leqslant 3$;
(2) 若 $b=2c$, 则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c} \geqslant 3$.