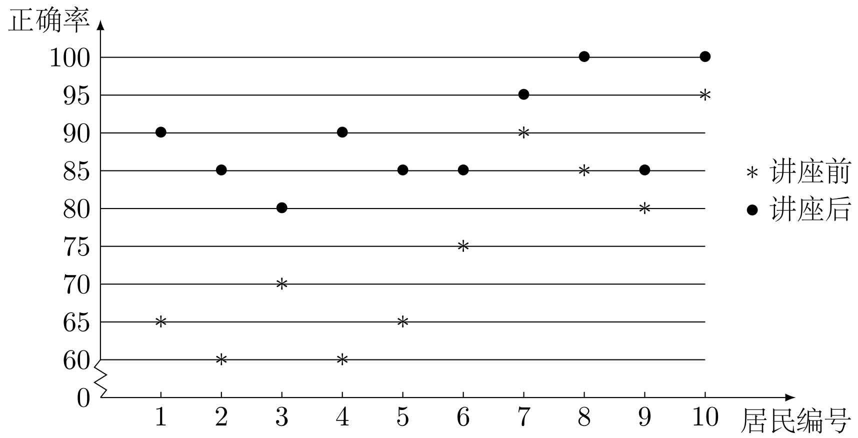
2022 普通高等学校招生考试 (全国甲卷理)

一、单选题

1. 若 $z=-1+\sqrt{3}i$, 则 $\dfrac{z}{z\bar{z}-1}=$ ( )

(A) $-1+\sqrt{3}i$ (B) $-1-\sqrt{3}i$ (C) $-\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ (D) $-\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

2. 某社区通过公益讲座以普及社区居民的垃圾分类知识. 为了解讲座效果, 随机抽取 10 位社区居民, 让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷, 这 10 位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图:



则 ( )

(A) 讲座前问卷答题的正确率的中位数小于 70%

(B) 讲座后问卷答题的正确率的平均数大于 85%

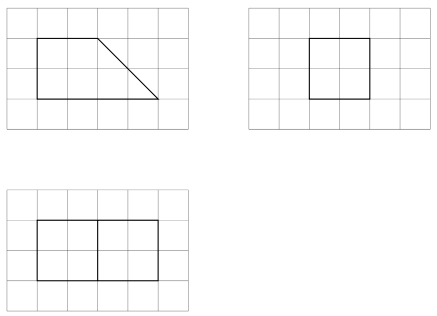
(C) 讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

(D) 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

3. 设全集 $U=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, 集合 $A=\{-1,\ 2\}$, $B=\{x\mid x^2-4x+3=0\}$, 则 $\complement_U(A\cup B)=$ ( )

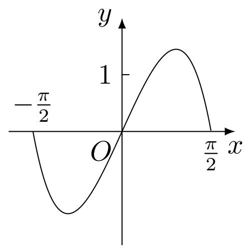
(A) $\{1,\ 3\}$ (B) $\{0,\ 3\}$ (C) $\{-2,\ 1\}$ (D) $\{-2,\ 0\}$

4. 如图, 网格纸上绘制的是一个多面体的三视图, 网格小正方形的边长为 1, 则该多面体的体积为 ( )

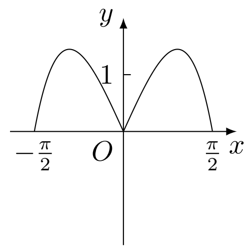


(A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 20

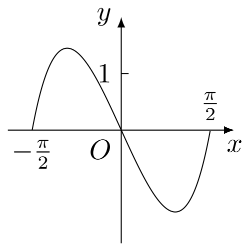
5. 函数 $y=(3^x-3^{-x})\cos x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的图象大致为 ( )



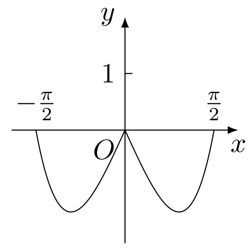
(A)



(B)



(C)



(D)

6. 当 $x=1$ 时, 函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{b}{x}$ 取得最大值 -2, 则 $f'(2)=$ ( )

(A) -1 (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1

7. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30°, 则 ( )

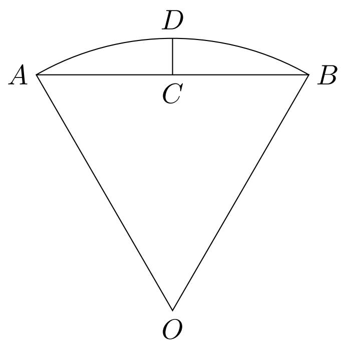
(A) $AB=2AD$

(B) AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 30°

(C) $AC=CB_1$

(D) B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45°

8. 沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技义上史上的杰作, 其中收录了计算圆弧长度的"会圆术". 如图, $\overset{\frown}{AB}$ 是以 O 为圆心, OA 为半径的圆弧, C 是 AB 的中点, D 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上, $CD\perp AB$, "会圆术"给出 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长的近似值 s 的计算公式: $s=AB+\dfrac{CD^2}{OA}$, 当 $OA=2$, $\angle AOB=60°$ 时, $s=$ ( )



(A) $\dfrac{11-3\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{11-4\sqrt{3}}{2}$ (C) $\dfrac{9-3\sqrt{3}}{2}$ (D) $\dfrac{9-4\sqrt{3}}{2}$

9. 甲、乙两个圆锥的母线长相等, 侧面展开图的圆心角之和为 2π, 侧面积分别为 $S_甲$ 和 $S_乙$, 体积分别为 $V_甲$ 和 $V_乙$. 若 $\dfrac{S_甲}{S_乙}=2$, 则 $\dfrac{V_甲}{V_乙}=$ ( )

(A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{10}$ (D) $\dfrac{5\sqrt{10}}{4}$

10. 椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左顶点为 A, 点 P, Q 均在 C 上, 且关于 y 轴对称. 若直线 AP, AQ 的斜率之积为 $\dfrac{1}{4}$, 则 C 的离心率为 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

11. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $(0,\pi)$ 恰有三个极值点、两个零点, 则实数 ω 的取值范围是 ( )

(A) $\left[\dfrac{5}{3},\dfrac{13}{6}\right)$ (B) $\left[\dfrac{5}{3},\dfrac{19}{6}\right)$ (C) $\left(\dfrac{13}{6},\dfrac{8}{3}\right]$ (D) $\left(\dfrac{13}{6},\dfrac{19}{6}\right]$

12. 已知 $a=\dfrac{31}{32}$, $b=\cos\dfrac{1}{4}$, $c=4\sin\dfrac{1}{4}$, 则 ( )

(A) $c>b>a$ (B) $b>a>c$ (C) $a>b>c$ (D) $a>c>b$

二、填空题

13. 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$, 且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=3$, 则 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=$______.

14. 若双曲线 $y^2-\dfrac{x^2}{m^2}=1\ (m>0)$ 的渐近线与圆 $x^2+y^2-4y+3=0$ 相切, 则 $m=$______.

15. 从正方体的 8 个顶点中任选 4 个, 则这 4 个点在同一个平面的概率为______.

16. 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $\angle ADB=120°$, $AD=2$, $CD=2BD$, 当 $\dfrac{AC}{AB}$ 取得最小值时, $BD=$______.

三、解答题

17. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\dfrac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$.

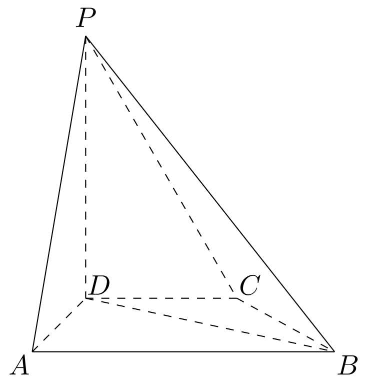
(1) 证明: $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 若 a_4, a_7, a_9 成等比数列, 求 S_n 的最小值.

18. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $CD\parallel AB$, $AD=DC=CB=1$, $AB=2$, $DP=\sqrt{3}$.

(1) 证明: $BD\perp PA$;

(2) 求 PD 与平面 PAB 所成的角的正弦值.



19. 甲、乙两个学校进行体育比赛, 比赛共设三个项目, 每个项目胜方得 10 分, 负方得 0 分, 没有平局. 三个项目比赛结束后, 总得分高的学校获得冠军. 已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为 0.5, 0.4, 0.8, 各项目的比赛结果相互独立.

(1) 求甲学校获得冠军的概率;

(2) 用 X 表示乙学校的总得分, 求 X 的分布列与期望.

20. 设抛物线 C: $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F, 点 $D(p,0)$, 过 F 的直线交 C 于 M, N 两点. 当直线 MD 垂直于 x 轴时, $|MF|=3$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B, 记直线 MN, AB 的倾斜角分别为 α, β. 当 $\alpha-\beta$ 取得最大值时, 求直线 AB 的方程.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-\ln x+x-a$.

(1) 若 $f(x)\geqslant 0$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: 若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2, 则 $x_1x_2<1$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{2+t}{6}, \\ y=\sqrt{t} \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=-\dfrac{2+s}{6}, \\ y=-\sqrt{s} \end{cases}$ (s 为参数).

(1) 写出 C_1 的普通方程;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_3 的极坐标方程为 $2\cos\theta-\sin\theta=0$, 求 C_3 与 C_1 交点的直角坐标, 及 C_3 与 C_2 交点的直角坐标.

23. 已知 a, b, c 均为正数, 且 $a^2+b^2+4c^2=3$, 证明:

(1) $a+b+2c\leqslant 3$;

(2) 若 $b=2c$, 则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\geqslant 3$.