2022 普通高等学校招生考试 (北京卷)

一、选择题

1. 已知全集 $U = \{x \mid -3 < x < 3\}$, 集合 $A = \{x \mid -2 < x \leqslant 1\}$, 则 $\complement_U A =$ ( )

(A) $(-2,1]$　(B) $(-3,-2)\cup[1,3)$

(C) $[-2,1)$　(D) $(-3,-2]\cup(1,3)$

2. 若复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z = 3-4\mathrm{i}$, 则 $|z| =$ ( )

(A) 1　(B) 5　(C) 7　(D) 25

3. 若直线 $2x+y-1=0$ 是圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 的一条对称轴, 则 $a =$ ( )

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $-\frac{1}{2}$　(C) 1　(D) -1

4. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+2^x}$, 则对任意实数 x, 有 ( )

(A) $f(-x)+f(x)=0$　(B) $f(-x)-f(x)=0$

(C) $f(-x)+f(x)=1$　(D) $f(-x)-f(x)=\frac{1}{3}$

5. 已知函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$, 则 ( )

(A) $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减　(B) $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增

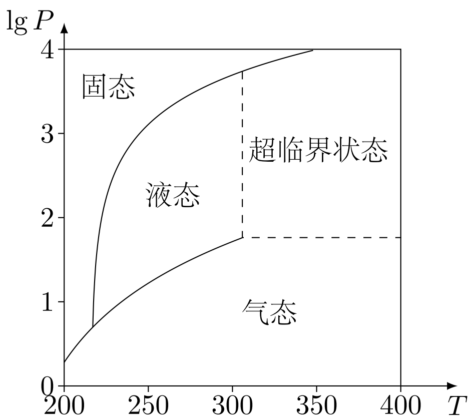
(C) $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减　(D) $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right)$ 上单调递增

6. 设 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的无穷等差数列, 则"$\{a_n\}$ 为递增数列"是"存在正整数 N_0, 当 $n>N_0$ 时, $a_n>0$ "的 ( )

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

7. 在北京冬奥会上, 国家速滑馆"冰丝带"使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术, 为实现绿色冬奥作出了贡献. 如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系, 其中 T 表示温度, 单位是 K; P 表示压强, 单位是 bar. 下列结论中正确的是 ( )



(A) 当 $T=220$, $P=1026$ 时, 二氧化碳处于液态

(B) 当 $T=270$, $P=128$ 时, 二氧化碳处于气态

(C) 当 $T=300$, $P=9987$ 时, 二氧化碳处于超临界状态

(D) 当 $T=360$, $P=729$ 时, 二氧化碳处于超临界状态

8. 若 $(2x-1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, 则 $a_0+a_2+a_4=$ ( )

(A) 40　(B) 41　(C) -40　(D) -41

9. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱长均为 6, S 是 $\triangle ABC$ 及其内部的点构成的集合, 设集合 $T=\{Q\in S \mid PQ\leqslant 5\}$, 则 T 表示的区域的面积为 ( )

(A) $\frac{3\pi}{4}$　(B) π　(C) 2π　(D) 3π

10. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=3$, $BC=4$, $\angle C=90^\circ$. P 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的动点, 且 $PC=1$, 则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是 ( )

(A) $[-5,3]$　(B) $[-3,5]$　(C) $[-6,4]$　(D) $[-4,6]$

二、填空题

11. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x}$ 的定义域是______.

12. 已知双曲线 $y^2+\frac{x^2}{m}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$, 则 $m=$______.

13. 若函数 $f(x)=A\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{3}$, 则 $A=$______; $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=$______.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1, & x<a,\\ (x-2)^2, & x\geqslant a.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值, 则 a 的一个取值为______; a 的最大值为______.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和 S_n 满足 $a_n\cdot S_n=9$ $(n=1,2,\cdots)$. 给出下列四个结论:

① $\{a_n\}$ 的第 2 项小于 3;　② $\{a_n\}$ 为等比数列;

③ $\{a_n\}$ 为递减数列;　④ $\{a_n\}$ 中存在小于 $\frac{1}{100}$ 的项.

其中所有正确结论的序号是______.

三、解答题

16. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin 2C=\sqrt{3}\sin C$.

(1) 求 $\angle C$;

(2) 若 $b=6$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

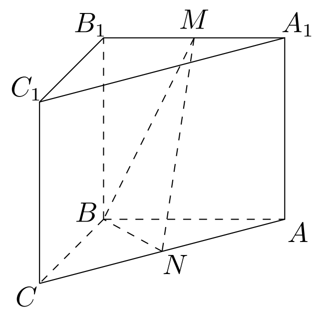
17. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧面 BCC_1B_1 为正方形, 平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 ABB_1A_1, $AB=BC=2$, M, N 分别为 A_1B_1, AC 的中点.

(1) 求证: $MN\parallel$ 平面 BCC_1B_1;

(2) 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值.

条件①: $AB\perp MN$;

条件②: $BM=MN$.



18. 在校运动会上, 只有甲、乙、丙三名同学参加铅球比赛, 比赛成绩达到 9.50 m 以上 (含 9.50 m) 的同学将获得优秀奖, 为预测获得优秀奖的人数及冠军得主, 收集了甲、乙、丙以往的比赛成绩, 并整理得到如下数据 (单位: m):

甲:	9.80	9.70	9.55	9.54	9.48	9.42	9.40	9.35	9.30	9.25
乙:	9.78	9.56	9.51	9.36	9.32	9.23				
丙:	9.85	9.65	9.20	9.16						

假设用频率估计概率, 且甲、乙、丙的比赛成绩相互独立.

(1) 估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率;

(2) 设 X 是甲、乙、丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的总人数, 估计 X 的数学期望 EX;

(3) 在校运动会铅球比赛中, 甲、乙、丙谁获得冠军的概率估计值最大? (结论不要求证明)

19. 已知椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$, 焦距为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程:

(2) 过点 $P(-2,1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B, C, 直线 AB, AC 分别与 x 轴交于点 M, N. 当 $|MN|=2$ 时, 求 k 的值.

20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\ln(1+x)$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 设 $g(x)=f'(x)$, 讨论函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性;

(3) 证明: 对任意的 s, $t\in(0,+\infty)$, 有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$.

21. 已知 Q: a_1, a_2, $\cdots$, a_k 为有穷整数数列. 给定正整数 m, 若对任意的 $n\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$, 在 Q 中存在 a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, $\cdots$, a_{i+j} $(j\geqslant 0)$, 使得 $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+j}=n$, 则称 Q 为 $m-$ 连续可表数列.

(1) 判断 Q: 2, 1, 4 是否为 5− 连续可表数列? 是否为 6− 连续可表数列? 说明理由;

(2) 若 Q: a_1, a_2, $\cdots$, a_k 为 8− 连续可表数列, 求证: k 的最小值为 4;

(3) 若 Q: a_1, a_2, $\cdots$, a_k 为 20− 连续可表数列, $a_1+a_2+\cdots+a_k<20$, 求证: $k\geqslant 7$.